第 16 讲：期末复习

【一元二次方程】

1．关于 x 的一元二次方程 $ax^2-ax+c=0(a\neq 0)$ 没有实数根，则系数 a，c 可能满足（　　）

A．$a<0$，$a-4c<0$　B．$a<0$，$a+4c<0$　C．$a>0$，$a+4c<0$　D．$a>0$，$a-4c<0$

【解答】解：$\because$ 已知 $ax^2-ax+c=0$ 没有实数根，

$\therefore \triangle=(-a)^2-4ac=a^2-4ac=a(a-4c)<0$，

$\therefore$ 当 $a>0$ 时，$a-4c<0$，

当 $a<0$ 时，$a-4c>0$，

故选：D．

2．关于 x 的方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的根是 $x_1=5$，$x_2=-6(a$，b，m 均为常数且 $a\neq 0)$，则关于 x 的方程 $ax^2+2a(2-m)x+a(m-2)^2+b=0$ 的所有实根之和是________．

【解答】解：原方程整理可得：

$a[x^2-2(m-2)x+(m-2)^2]+b=0$，

配方得：$a(x-m+2)^2+b=0$，

变形得：$a((-x-2)+m)^2+b=0$，

令 $y=-x-2$，则原方程变为 $a(y+m)^2+b=0$，

已知方程 $a(x+m)^2+b=0$ 的根为 $x_1=5$，$x_2=-6$，

因此 $y_1=5$，$y_2=-6$，

即 $-x-2=5$ 或 $-x-2=-6$，

解得 $x_1=-7$，$x_2=4$，

所有实根之和为 $-7+4=-3$．

故答案为：-3．

3．已知 a，b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2tx+t^2-2t+4=0$ 的两个实数根，则 $(a+4)(b+4)$ 的最小值是（　　）

A．11　B．20　C．28　D．36

【解答】解：由题知，

因为 a，b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2tx+t^2-2t+4=0$ 的两个实数根，

所以 $a+b=2t$，$ab=t^2-2t+4$，

所以 $(a+4)(b+4)=ab+4(a+b)+16=t^2-2t+4+8t+16=t^2+6t+20=(t+3)^2+11$．

又因为 $\triangle=(-2t)^2-4(t^2-2t+4)=8t-16\geqslant 0$，

所以 $t\geqslant 2$，

则当 $t=2$ 时，$(a+4)(b+4)$ 有最小值为：$5^2+11=36$．

故选：D．

4．规定：如果实数a，b，c满足$a-b=b-c$，那么称一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$为“等差”二次方程.

（1）下列方程是“等差”二次方程的有________（填序号）；

①$3x^2+4x+5=0$；②$x^2+2x-3=0$；③$x^2-1=0$；④$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}=0$

（2）若“等差”二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的一个根为2，求这个方程的另一个根；

（3）若m，n是“等差”二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根，请写出m，n的数量关系，并说明理由.

【解答】解：(1)①$3x^2+4x+5=0$，$a=3$，$b=4$，$c=5$，$a-b=-1$，$b-c=-1$，所以$a-b=b-c$，是“等差”二次方程；

②$x^2+2x-3=0$，$a=1$，$b=2$，$c=-3$，$a-b\neq b-c$，所以不是“等差”二次方程；

③$x^2-1=0$，$a=1$，$b=0$，$c=-1$，$a-b=b-c$，所以是“等差”二次方程；

④$\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{5}=0$，$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{1}{4}$，$c=\frac{1}{5}$，$a-b\neq b-c$，所以不是“等差”二次方程.

故答案为：①③；

（2）当$x_1=2$时，代入原方程得：$4a+2b+c=0$，

$\because$由$a-b=b-c$ 得$a+c=2b$，

$\therefore$代入得$5a+2c=0$，

$\therefore \frac{c}{a}=-\frac{5}{2}$，

$\because x_1x_2=\frac{c}{a}$，

$\therefore 2x_2=-\frac{5}{2}$，

$\therefore x_2=-\frac{5}{4}$.

（3）$\because m$，n是“等差”二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根，

$\therefore m+n=-\frac{b}{a}$，$mn=\frac{c}{a}$，

$\therefore 2m+2n=-\frac{2b}{a}=-\frac{a+c}{a}$，

$\therefore 2m+2n=-1-\frac{c}{a}$，

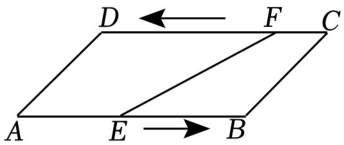
$\therefore 2m+2n=-1-mn$，

即$2m+2n+mn+1=0$，

$\therefore (m+2)(n+2)=3$.

【四边形】

5．如图，$\square ABCD$ 中，$AB=22cm$，$BC=8\sqrt{2}cm$，$\angle A=45^{\circ}$，动点 E 从 A 出发，以 $2cm/s$ 的速度沿 AB 向点 B 运动，动点 F 从点 C 出发，以 $1cm/s$ 的速度沿着 CD 向 D 运动，当点 E 到达点 B 时，两个点同时停止．则 EF 的长为 $10cm$ 时点 E 的运动时间是（　　）



A． $6s$　　　　B． $6s$ 或 $10s$　　　　C． $8s$　　　　D． $8s$ 或 $12s$

【解答】解：在 $\square ABCD$ 中，$CD=AB=22cm$，$AD=BC=8\sqrt{2}cm$，

如图，过点 D 作 $DG\perp AB$ 于点 G，

$\because \angle A=45^{\circ}$，

$\therefore \triangle ADG$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AG=DG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AD=8$，

过点 F 作 $FH\perp AB$ 于点 H，

得矩形 $DGHF$，

$\therefore DG=FH=8cm$，$DF=GH$，

$\because EF=10cm$，

$\therefore EH=\sqrt{EF^{2}-FH^{2}}=6cm$，

由题意可知：$AE=2t\ cm$，$CF=t\ cm$，

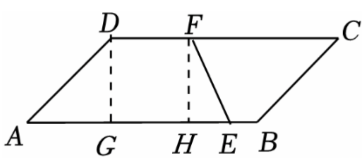
$\therefore GE=AE-AG=(2t-8)cm$，$DF=CD-CF=(22-t)cm$，

$\therefore GH=GE+EH=(2t-8)+6=(2t-2)cm$，

$\therefore 2t-2=22-t$，

解得 $t=8$，

当 F 点在. E .点左侧时，



由题意可知：$AE=2t\ cm$，$CF=t\ cm$，

$\therefore GE=AE-AG=(2t-8)cm$，$DF=CD-CF=(22-t)cm$，

$\therefore GH=GE-EH=(2t-8)-6=(2t-14)cm$，

$\therefore 2t-14=22-t$，

解得 $t=12$，

$\because$ 点 E 到达点 B 时，两点同时停止运动，

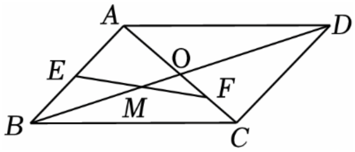
$\therefore 2t\leqslant 22$，解得 $t\leqslant 11$．

$\therefore t=12$ 不符合题意，舍去，

$\therefore EF$ 的长为 $10cm$ 时点 E 的运动时间是 $8s$，

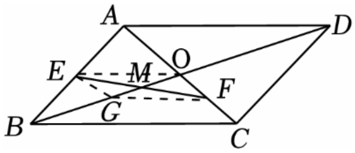
故选：C．

6．如图，平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，E 为 AB 的中点，F 为 OC 的中点，连接 EF 交 OB 于点 M．若 $OM=1$，则 BD 的长为（　　）



A．8　　　　B．7　　　　C．6　　　　D．4

【解答】解：如图，平行四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC，BD 相交于点 O，取 BO 的中点 G，则 $OG=BG$，连接 FG，EG，OE，



$\therefore AO=OC$，$BO=OD$，

又$\because E$ 为 AB 的中点，F 为 OC 的中点，

$\therefore AE=BE$，$OF=FC$，

$\therefore OE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线，FG 是$\triangle BOC$ 的中位线，

$\therefore OE=\dfrac{1}{2}BC$，$OE//BC$，$FG=\dfrac{1}{2}BC$，$FG//BC$，

$\therefore OE=FG$，$OE//FG$，

$\therefore$四边形 $EOFG$ 是平行四边形，

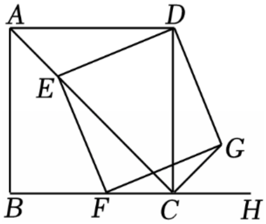
$\therefore MO=MG=1$，

$\therefore OB=2OG=4OM=4$，

$\therefore BD=2OB=8$．

故选：A．

7．如图，正方形 $ABCD$ 的边长为 9，E 为对角线 AC 上一点，连接 DE，过点 E 作 $EF\perp DE$，交射线 BC 于点 F，以 DE，EF 为邻边作矩形 $DEFG$，连接 CG，下列结论中不正确的是（　　）



A．矩形 $DEFG$ 是正方形　　　　B．$\angle CEF=\angle ADE$

C．CG 平分 $\angle DCH$　　D．$CE+CG=9\sqrt{2}$

【解答】解：如图，作 $EK\perp BC$ 于点 K，$EL\perp CD$ 于点 L，则 $\angle EKF=\angle ELD=90^{\circ}$，

$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=CB$，$AD=CD$，$\angle B=\angle ADC=90^{\circ}$，

$\therefore \angle BCA=\angle BAC=45^{\circ}$，$\angle DCA=\angle DAC=45^{\circ}$，

$\therefore \angle BCA=\angle DCA$，

$\therefore EK=EL$，

$\because \angle EKC=\angle ELC=\angle KCL=90^\circ$，

$\therefore$ 四边形 $EKCL$ 是矩形，

$\because$ 四边形 $DEFG$ 是矩形，

$\therefore \angle KEL=\angle FED=90$，

$\therefore \angle FEK=\angle DEL=90^\circ-\angle FEL$，

$\therefore \triangle FEK\cong\triangle DEL(ASA)$，

$\therefore DE=FE$，

$\therefore$ 矩形 $DEFG$ 是正方形，故 A 正确；

$\because \angle EDG=\angle ADC=90^\circ$，

$\therefore \angle CDG=\angle ADE=90^\circ-\angle CDE$，

$\because CD=AD$，$GD=ED$，

$\therefore \triangle CDG\cong\triangle ADE(SAS)$，

$\therefore CG=AE$，

$\therefore CE+CG=CE+AE=AC$，

$\because \angle B=90^\circ$，$AB=CB=9$，

$\therefore AC=\sqrt{2}AB=9\sqrt{2}$，

$\therefore CE+CG=9\sqrt{2}$，故 D 正确；

$\because \triangle CDG\cong\triangle ADE(SAS)$，

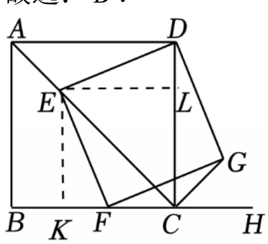
$\therefore \angle DAE=\angle DCG=45^\circ$，

$\therefore CG$ 平分 $\angle DCH$，故 C 正确；

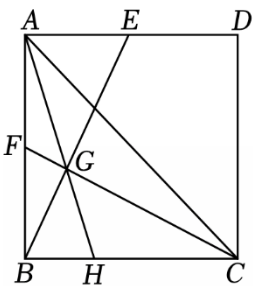
$\because \angle ADE=\angle DEL=\angle FEK\neq\angle CEF$，

$\therefore \angle CEF\neq\angle ADE$，故 B 不正确，

故选：B．



8．如图，在正方形 $ABCD$ 中，点 E 在线段 AD 上，点 F 在线段 AB 上，$AE=BF$，连接 BE，CF，交于点 G，连接 AG 并延长交 BC 于点 H．若 $\angle BAH=\angle ACF$，$AG=\sqrt{2}$，则 AE 的长为（　　）



A. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【解答】解：$\because$四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AB=BC$， $\angle EAB=\angle FBC=90^{\circ}$， $\angle BAC=\angle DAC=\angle ACB=45^{\circ}$，

$\because AE=BF$，

$\therefore\triangle AEB\cong\triangle BFC(SAS)$，

$\therefore\angle ABE=\angle BCF$，

$\therefore\angle ABE+\angle BFG=\angle BCF+\angle BFG=90^{\circ}$，

$\therefore\angle BGF=90^{\circ}$，

$\therefore BG\perp CF$，

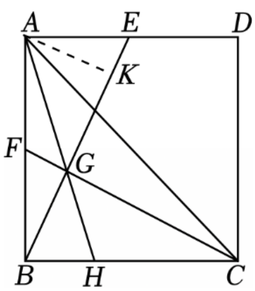
$\therefore\angle ABE=\angle BCF$， $BE=CF$，

$\because\angle BAH=\angle ACF$，

$\therefore\angle BCF+\angle ACF=\angle BAH+\angle ABE=45^{\circ}$，

$\therefore\angle BGH=\angle BAH+\angle ABE=45^{\circ}=\angle AGE$，

过点 A 作 $AK\perp BE$ 于点 K，如图，



$\therefore\triangle AKG$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AK=KG=\frac{\sqrt{2}}{2}AG=1$，

$\because\triangle AEB\cong\triangle BFC$，且 $BE=CF$，.

$\therefore AK=BG=1=KG$，

$\because BK=2$，

$\therefore AB=\sqrt{AK^{2}+BK^{2}}=\sqrt{5}$，

设 $EK=x$，则有 $BE=2+x$，

在 $Rt\triangle AEK$ 中， $AE^{2}=AK^{2}+EK^{2}=1+x^{2}$，

在 $Rt\triangle AEB$ 中， $AE^{2}=BE^{2}-AB^{2}=(2+x)^{2}-5$，

$\therefore 1+x^2=(2+x)^2-5$，

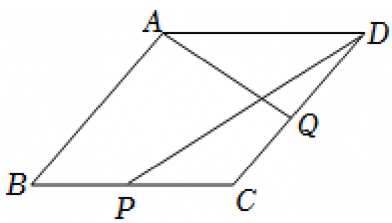
解得：$x=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore AE^2=\dfrac{5}{4}$，

$\therefore AE=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

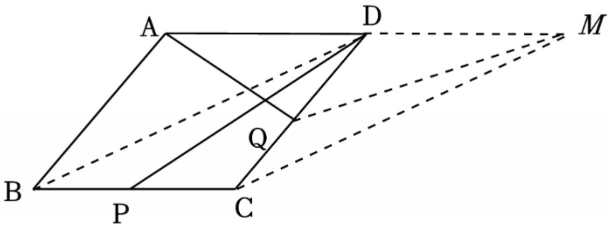
故选：B．

9．如图，已知菱形 $ABCD$ 的面积为 20，边长为 5，点 P 、Q 分别是边 BC 、CD 上的动点，且 $BP=CQ$，连接 PD 、 AQ，则 $PD+AQ$ 的最小值为（　　）



A． $4\sqrt{5}$　　　　B． $\sqrt{89}$　　　　C． 10　　　　D． $7\sqrt{2}$

【解答】解：连接 BD，作 $CM//BD$，交 AD 延长线于 M，如图：



$\therefore$ 四边形 $BDMC$ 为平行四边形，

$\therefore DM=BC=5$， $BD=CM$，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore \angle CBD=\angle CDB$，

$\because CM//BD$，

$\therefore \angle DCM=\angle CDB$，

$\therefore \angle DCM=\angle CBD$，

又 $\because BP=CQ$，

$\therefore \triangle BDP\cong\triangle CMQ(SAS)$，

$\therefore DP=QM$，

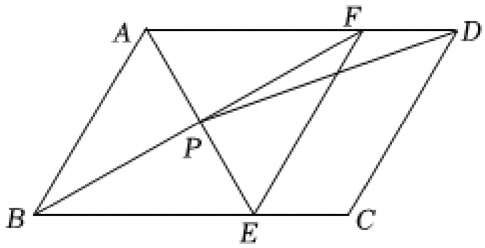
$\therefore AQ+DP=AQ+QM\geqslant AM=2AD=10$．

故选：C．

10．如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， AE 平分 $\angle BAD$，交 BC 于点 E， BF 平分 $\angle ABC$，交 AD 于点 F， AE 与 BF 交于点 P，连接 EF， PD．

（1）求证：四边形 $ABEF$ 是菱形；

（2）若 $AB=8$， $AD=12$， $\angle ABC=60^\circ$，求线段 DP 的长．



【解答】（1）证明：$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD//BC$．

$\therefore \angle DAE=\angle AEB$．

$\because AE$平分$\angle BAD$，

$\therefore \angle DAE=\angle BAE$．

$\therefore \angle BAE=\angle AEB$．

$\therefore AB=BE$．

同理：$AB=AF$．

$\therefore AF=BE$．

$\therefore$四边形$ABEF$是平行四边形．

$\because AB=BE$，

$\therefore$四边形$ABEF$是菱形；

（2）解：$\because$四边形$ABEF$是菱形，

$\therefore AE\perp BF$，

$\because \angle ABC=60^{\circ}$，

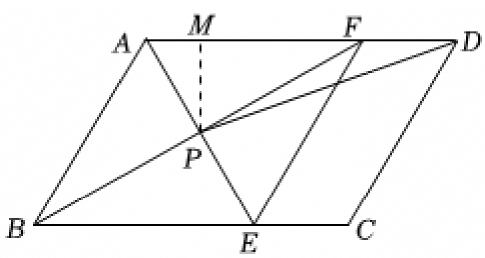
$\therefore \angle ABF=30^{\circ}$，$\angle BAP=\angle FAP=60^{\circ}$，$\Delta ABE$为等边三角形，

$\therefore AB=AE=8$，

$\because AB=8$，

$\therefore AP=4$，

过点P作$PM\perp AD$于M，如图所示：



$\therefore PM=2\sqrt{3}$，$AM=2$，

$\because AD=12$，

$\therefore DM=10$，

$\therefore PD=\sqrt{PM^{2}+DM^{2}}=\sqrt{(2\sqrt{3})^{2}+10^{2}}=4\sqrt{7}$．