



## 第 14 讲：含参二次函数综合

## 【定轴定区间最值】

1. 二次函数  $y = -x^2 - 2x + c^2 - 2c$  在  $-3 \leq x \leq 2$  的范围内有最小值为  $-5$ ，则  $c$  的值( )

- A. 3 或  $-1$                       B.  $-1$                       C.  $-3$  或  $1$                       D. 3

【解答】解：  $\because y = -x^2 - 2x + c^2 - 2c = -(x+1)^2 + c^2 - 2c + 1$ ，

$\therefore$  抛物线开口向下，对称轴为直线  $x = -1$ ，

$\because 2 - (-1) > -1 - (-3)$ ，

$\therefore$  在  $-3 \leq x \leq 2$  的范围内， $x = 2$  时， $y = -4 - 4 + c^2 - 2c = c^2 - 2c - 8 = (c-1)^2 - 9$  为函数最小值，

$\therefore (c-1)^2 - 9 = -5$ ，

解得  $c = 3$  或  $c = -1$ ，

故选：A.

2.  $y$  关于  $x$  的二次函数  $y = ax^2 + a^2$ ，在  $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$  时有最大值 6，则  $a =$  \_\_\_\_\_.

【解答】解：当  $a < 0$ ，函数的最大值为  $y = a^2 = 6$ ，

解得： $a_1 = \sqrt{6}$  (不合题意舍去)， $a_2 = -\sqrt{6}$ ，

当  $a > 0$ ， $x = -1$  时， $y_{\text{最大值}} = a + a^2 = 6$ ，

解得： $a = 2$  或  $a = -3$  (舍去).

综上所述， $a$  的值是 2 或  $-\sqrt{6}$ .

故答案为：2 或  $-\sqrt{6}$ .

## 【动态区间最值】

3. 当  $-2 \leq x \leq 1$  时，二次函数  $y = -(x-m)^2 + m^2 + 1$  有最大值 4，则实数  $m$  的值是 ( )

- A. 2 或  $\sqrt{3}$                       B. 2 或  $\sqrt{3}$  或  $-\sqrt{3}$  或  $-\frac{7}{4}$

- C. 2 或  $-\sqrt{3}$  或  $-\frac{7}{4}$                       D. 2 或  $-\sqrt{3}$

【解答】解：二次函数的对称轴为直线  $x = m$ ，

①  $m < -2$  时， $x = -2$  时二次函数有最大值，

此时  $-(-2-m)^2 + m^2 + 1 = 4$ ，

解得  $m = -\frac{7}{4}$ ，与  $m < -2$  矛盾，故  $m$  值不存在；

② 当  $-2 \leq m \leq 1$  时， $x = m$  时，二次函数有最大值，此时  $m^2 + 1 = 4$ ，

解得  $m = -\sqrt{3}$ ， $m = \sqrt{3}$  (舍去)；

③ 当  $m > 1$  时， $x = 1$  时二次函数有最大值，

此时  $-(1-m)^2 + m^2 + 1 = 4$ ，

解得  $m = 2$ ，



综上所述,  $m$  的值为 2 或  $-\sqrt{3}$ ,

故选: D.

4. 已知二次函数  $y = x^2 - 2bx + c$  ( $b, c$  为常数), 当  $b-1 \leq x \leq b+2$  时, 该函数的最大值与最小值的差是  $-2k$ , 则  $k$  的值为 ( )

- A. -1                      B.  $-\frac{3}{2}$                       C. -2                      D.  $-\frac{5}{2}$

**【解答】**解:  $\because y = x^2 - 2bx + c = (x-b)^2 - b^2 + c$ ,

$\therefore$  顶点坐标为  $(b, c-b^2)$ ,

$\because 1 > 0$ , 即抛物线开口向上,

$\therefore$  最小值为  $c-b^2$ ,

$\therefore$  当  $b-1 \leq x \leq b+2$  时, 该函数的最小值为  $c-b^2$ ,

$\because b - (b-1) < b+2 - b$ ,

$\therefore$  当  $x = b+2$  时, 函数取得最大值, 为  $y = (b+2)^2 - 2b(b+2) + c = -b^2 + 4 + c$ ,

由题意可得:  $-b^2 + 4 + c - (c - b^2) = -2k$ ,

解得:  $k = -2$ .

故选: C.

### 【二次函数的增减性】

5. 已知函数  $y = kx^2 + (2k+1)x + 1$  ( $k$  为实数). 对于任意正实数  $k$ , 当  $x > m$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而增大, 则  $m$  的取值范围为: \_\_\_\_\_.

**【解答】**解:  $\because y = kx^2 + (2k+1)x + 1$  ( $k$  为实数),  $k > 0$ ,

$\therefore$  该抛物线开口向上, 对称轴为直线  $x = -\frac{2k+1}{2k} = -1 - \frac{1}{2k} < -1$ ,

$\therefore$  对于任意正实数  $k$ , 当  $x > m$  时,  $y$  随着  $x$  的增大而增大,

$\therefore m \geq -1$ ,

故答案为:  $m \geq -1$ .

6. 已知二次函数  $y = mx^2 - 2mx + 3$ , 其中  $m \neq 0$ .

(1) 若二次函数经过  $(-1, 4)$ , 求二次函数解析式.

(2) 若该抛物线开口向上, 当  $-1 \leq x \leq 2$  时, 抛物线的最高点为  $M$ , 最低点为  $N$ , 点  $M$  的纵坐标为 9, 求点  $M$  和点  $N$  的坐标.

(3) 在二次函数图象上任取两点  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ , 当  $a \leq x_1 < x_2 \leq a+2$  时, 总有  $y_1 > y_2$ , 求  $a$  的取值范围.

**【解答】**解: (1) 把  $(-1, 4)$  代入函数解析式得,

$$m + 2m + 3 = 4,$$

$$\therefore m = \frac{1}{3},$$



∴ 函数解析式为:  $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 3$ ;

(2) ∵ 抛物线开口方向向上,

∴  $m > 0$ ,

∵  $y = mx^2 - 2mx + 3 = m(x-1)^2 + 3 - m$ ,

∴ 抛物线的顶点为  $(1, 3-m)$ ,

∴ 当  $x < 1$  时  $y$  随  $x$  增大而减小,

当  $x \geq 1$  时,  $y$  随  $x$  增大而增大,

∴ 最低点  $N(1, 3-m)$ ,

∵ 当  $x = -1$  时,  $y = 3m + 3$ ,

当  $x = 2$  时,  $y = 3$ ,

且  $m > 0$ ,

∴  $3m + 3 > 3$ ,

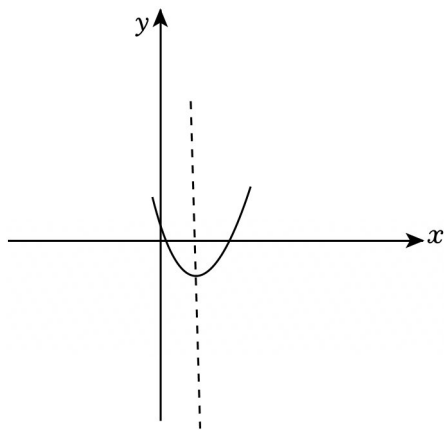
∴ 最高点  $M(-1, 3m + 3)$ ,

∴  $3m + 3 = 9$ ,

∴  $m = 2$ ,

代入  $M$  点和  $N$  点坐标得:  $M(-1, 9)$ ,  $N(1, 1)$ ;

(3) ① 当  $m > 0$  时,



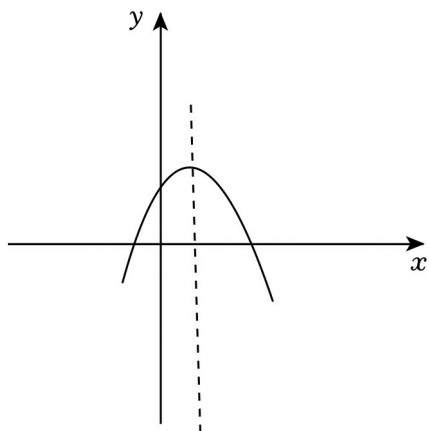
则有当  $x \leq 1$  时  $y$  随  $x$  增大而减小,

当  $x \geq 1$  时,  $y$  随  $x$  增大而增大,

∴  $a + 2 \leq 1$ ,

∴  $a \leq -1$ ;

② 当  $m < 0$  时,



则有当  $x \leq 1$  时  $y$  随  $x$  增大而增大,

当  $x \geq 1$  时,  $y$  随  $x$  增大而减小,

$\therefore a \geq 1$ ;

综上, 当  $m > 0$  时  $a \leq -1$ ; 当  $m < 0$  时,  $a \geq 1$ .

### 【函数值大小比较】

7. 在平面直角坐标系中, 已知抛物线  $y = ax^2 - 2ax + 4 (a > 0)$ . 若  $A(m-1, y_1)$ ,  $B(m, y_2)$ ,  $C(m+2, y_3)$  为抛物线上三点, 且总有  $y_1 > y_3 > y_2$ , 则  $m$  的取值范围可以是 ( )

A.  $m < 1$

B.  $m > \frac{3}{2}$

C.  $0 < m < \frac{1}{2}$

D.  $1 < m < \frac{3}{2}$

【解答】解:  $\because y = ax^2 - 2ax + 4 (a > 0)$ ,

$\therefore$  抛物线对称轴为直线  $x = 1$ , 抛物线开口向上,

$\because y_1 > y_3$ ,

$\therefore \frac{x_1 + x_3}{2} < 1$ , 即  $\frac{m-1+m+2}{2} < 1$ ,

解得  $m < \frac{1}{2}$ ,

$\because y_3 > y_2$ ,

$\therefore \frac{m+m+2}{2} > 1$ ,

解得  $m > 0$ ,

$\therefore 0 < m < \frac{1}{2}$ ,

故选: C.

8. 若  $A(m, y_1)$ ,  $B(m-2, y_2)$  是函数  $y = -(x-1)^2 + 3$  图象上的两点, 且  $1 \leq m < 2$ , 则  $y_1$  与  $y_2$  的大小关系为 ( )

A.  $y_1 > y_2$

B.  $y_1 \geq y_2$

C.  $y_1 < y_2$

D.  $y_1 \leq y_2$

【解答】解:  $\because y_1 = -(m-1)^2 + 3$ ,  $y_2 = -(m-3)^2 + 3$ ,



$$\begin{aligned} & \therefore y_1 - y_2 \\ & = [-(m-1)^2 + 3] - [-(m-3)^2 + 3] \\ & = (m-3)^2 - (m-1)^2 \\ & = (-2) \times (2m-4) \\ & = -4m + 8, \\ & \because 1 \leq m < 2, \\ & \therefore -4m + 8 > 0, \\ & \text{即 } y_1 > y_2. \\ & \text{故选: } A. \end{aligned}$$