



相似三角形判定定理的证明知识讲解

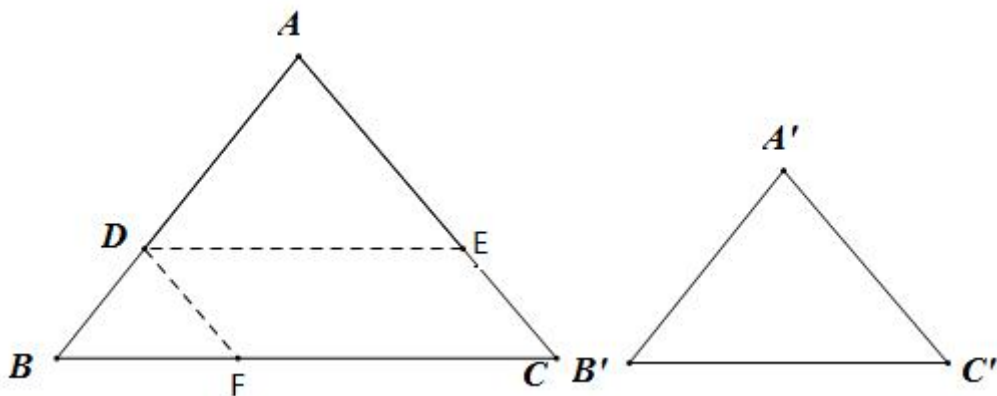
【学习目标】

1. 熟记三个判定定理的内容.
2. 三个判定定理的证明过程.
3. 学会用适当的方法证明结论的成立性.

【要点梳理】

要点一、两角分别相等的两个三角形相似

已知：如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A' B' C'$ 中， $\angle A = \angle A'$ ， $\angle B = \angle B'$. 求证： $\triangle ABC \sim \triangle A' B' C'$.



证明：在 $\triangle ABC$ 的边 AB （或它的延长线）上截取 $AD = A' B'$ ，过点 D 作 BC 的平行线，交 AC 于点 E ，则 $\angle ADE = \angle B$ ， $\angle AED = \angle C$ ，

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (\text{平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例})$$

过

点 D 作 AC 的平行线，交 BC 与点 F ，则

$$\frac{AD}{AB} = \frac{CF}{CB} \quad (\text{平行于三角形一边的直线与其他两边相交，截得的对应线段成比例}).$$

$\therefore$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{CF}{CB}$$

$$\because DE \parallel BC, DF \parallel AC,$$

$$\therefore \text{四边形 } DFCE \text{ 是平行四边形.}$$

$$\therefore DE = CF.$$

$$\therefore AE : AC = DE : CB$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

$$\text{而 } \angle ADE = \angle B, \angle DAE = \angle BAC, \angle AED = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

$$\because \angle A = \angle A', \angle ADE = \angle B = \angle B', AD = A' B',$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle A' B' C'.$$

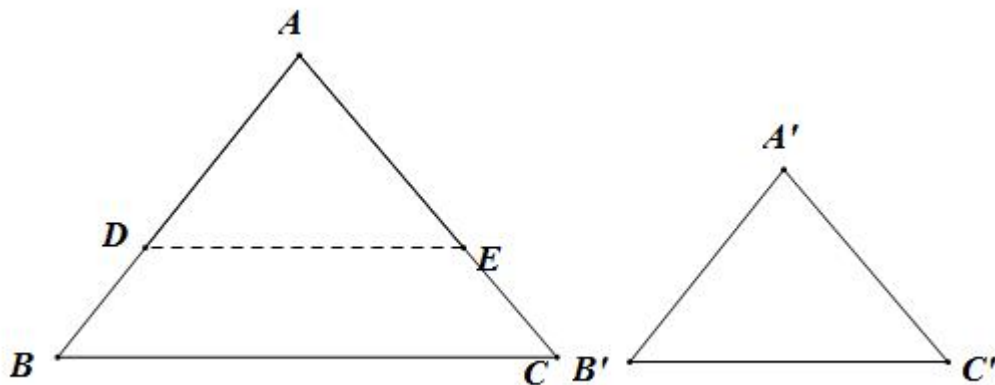
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A' B' C'.$$

要点诠释：证明这个定理的正确性，是把它转化为平行线分线段成比例来证明的，注意转化时 辅助线的做法.



要点二、两边成比例且夹角相等的两个三角形相似

已知，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $\angle A = \angle A'$ ， $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ ，求证： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。



证明：在 $\triangle ABC$ 的边AB（或它的延长线）上截取 $AD = A'B'$ ，过点D作BC的平行线，交AC于点E，则
 $\angle B = \angle ADE$ ， $\angle C = \angle AED$ ，

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ （两角分别相等的两个三角形相似）。

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, AD = A'B',$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\therefore \frac{AC}{AE} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$\therefore AE = A'C'$$

$$\text{而 } \angle A = \angle A'$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C'.$$

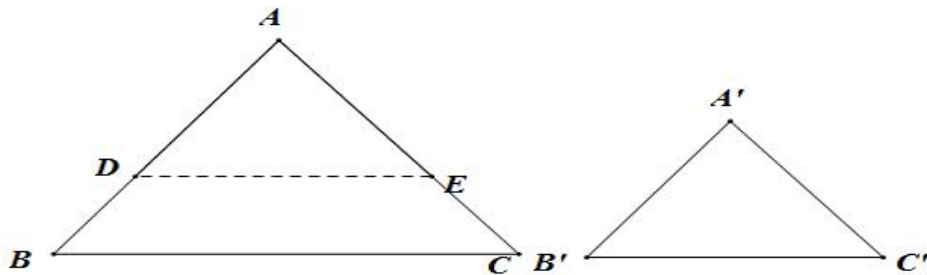
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

要点诠释：利用了转化的数学思想，通过添设辅助线，将未知的判定方法转化为已知两组角对应相等推得相似或已知平行推得相似的。

要点三、三边成比例的两个三角形相似

已知：在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ 。

求证： $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ 。





证明：在 $\triangle ABC$ 的边 AB ， AC （或它们的延长线）上截取 $AD=A'B'$ ， $AE=A'C'$ ，连接 DE 。

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}, AD=A'B', AE=A'C',$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

而 $\angle BAC = \angle DAE$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$ (两边成比例且夹角相等的两个三角形相似)。

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

$$\text{又 } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}, AD=A'B',$$

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\therefore \frac{BC}{DE} = \frac{BC}{B'C'}$$

$$\therefore DE=B'C',$$

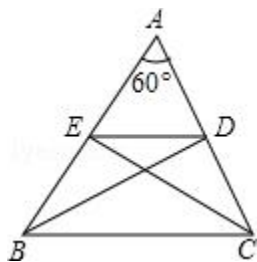
$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle A'B'C',$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

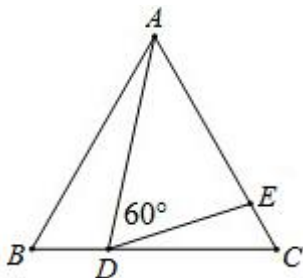
【典型例题】

类型一、两角分别相等的两个三角形相似

1、在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=60^\circ$ ， $BD \perp AC$ ，垂足为 D ， $CE \perp AB$ ，垂足为 E ，求证： $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。

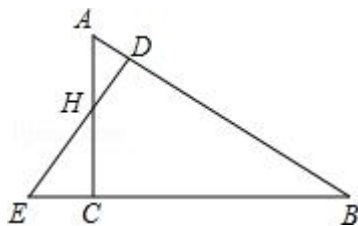


【变式】如图， $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 D ， E 分别在 BC 、 AC 上，且 $\angle ADE=60^\circ$ ，求证： $BD \cdot CD = AC \cdot CE$ 。





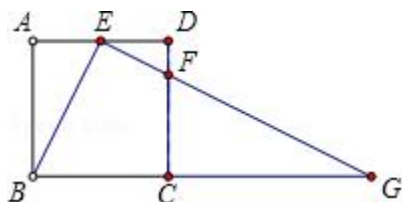
2、已知， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ，点 H 在 AC 上，且线段 $HD \perp AB$ 于 D ， BC 的延长线与 DH 的延长线交于点 E ，求证： $\triangle AHD \sim \triangle EBD$ 。



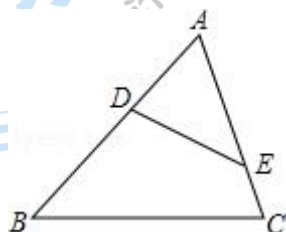
类型二、两边成比例且夹角相等的两个三角形相似

3、如图，在正方形 $ABCD$ 中， E 、 F 分别是边 AD 、 CD 上的点， $AE=ED$ ， $DF=\frac{1}{4}DC$ ，连接 EF 并延长交 BC 的延长线于点 G 。

- (1) 求证： $\triangle ABE \sim \triangle DEF$ ；
(2) 若正方形的边长为 4，求 BG 的长。

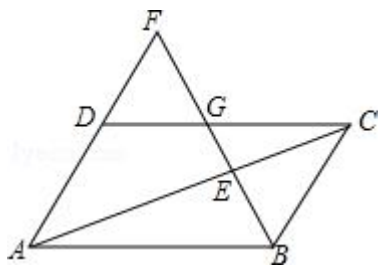


【变式】如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别在边 AB 、 AC 上，下列条件中不能判断 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 的是（ ）



- A. $\angle AED = \angle B$ B. $\angle ADE = \angle C$ C. $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$ D. $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

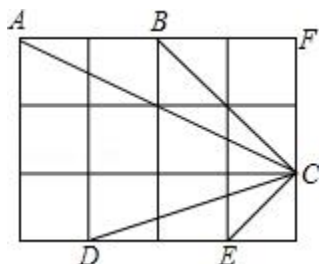
4、如图， F 为平行四边形 $ABCD$ 的边 AD 的延长线上的一点， BF 分别交于 CD 、 AC 于 G 、 E ，若 $EF=32$ ， $GE=8$ ，求 BE 。





【变式】如图，在 4×3 的正方形方格中， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 的顶点都在边长为 1 的小正方形的顶点上。

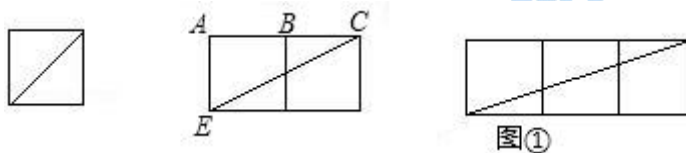
- (1) 填空： $\angle ABC = \underline{\quad}^\circ$ ， $BC = \underline{\quad}$ ；
(2) 判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 是否相似，并证明你的结论。



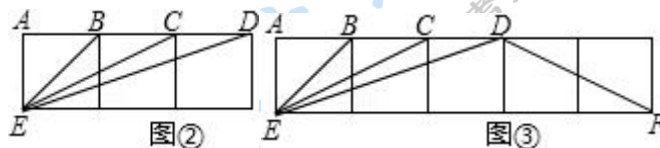
类型三、三边成比例的两个三角形相似

5、已知：正方形的边长为 1

- (1) 如图①，可以算出正方形的对角线为 $\underline{\quad}$ ，求两个正方形并排拼成的矩形的对角线长， n 个呢？



- (2) 根据图②，求证 $\triangle BCE \sim \triangle BED$ ；



- (3) 由图③，在下列所给的三个结论中，通过合情推理选出一个正确的结论加以证明，1. $\angle BEC + \angle BDE = 45^\circ$ ；
2. $\angle BEC + \angle BED = 45^\circ$ ； 3. $\angle BEC + \angle DFE = 45^\circ$



相似三角形判定定理的证明知识讲解

类型一、两角分别相等的两个三角形相似

1、

【思路点拨】由 $BD \perp AC$, $CE \perp AB$ 得到 $\angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$, 利用 $\angle EAC = \angle DAB$ 可判断 $\triangle AEC \sim \triangle ADB$, 则 $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$,

利用比例性质得 $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$, 加上 $\angle EAD = \angle CAB$, 根据三角形相似的判定方法即可得到结论.

【答案与解析】

证明: $\because BD \perp AC$, $CE \perp AB$,

$$\therefore \angle AEC = \angle ADB = 90^\circ,$$

而 $\angle EAC = \angle DAB$,

$$\therefore \triangle AEC \sim \triangle ADB,$$

$$\therefore \frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB},$$

$$\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB},$$

$$\because \angle EAD = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

【总结升华】考查了相似三角形的判定与性质: 有两组角对应相等的两三角形相似; 有两组对应边的比相等且夹角相等的两个三角形相似; 相似三角形的对应边的比相等.

举一反三

【变式】【答案】

证明: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, AB = AC,$$

$$\because \angle B + \angle BAD = \angle ADE + \angle CDE, \angle B = \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CDE,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BD}{CE},$$

$$\therefore BD \cdot CD = AB \cdot CE,$$

$$\text{即 } BD \cdot CD = AC \cdot CE;$$

2、

【思路点拨】首先利用三角形的内角和定理证明: $\angle A = \angle E$, 再有垂直得到 90° 的角, $\angle ADH = \angle ACB = 90^\circ$, 从而证明: $\triangle AHD \sim \triangle EBD$.

【答案与解析】

证明: $\because HD \perp AB$ 于 D ,

$$\therefore \angle ADH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle AHD = 90^\circ,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$



$$\begin{aligned} \therefore \angle E + \angle AHD &= 90^\circ, \\ \therefore \angle A &= \angle E, \\ \therefore \angle ADH &= \angle ACB = 90^\circ, \\ \therefore \triangle AHD &\sim \triangle EBD. \end{aligned}$$

【总结升华】考查了垂直定义、三角形内角和定理以及相似三角形的判定方法：两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似。

类型二、两边成比例且夹角相等的两个三角形相似

3、

【思路点拨】(1) 利用正方形的性质，可得 $\angle A = \angle D$ ，根据已知可得 $\frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DE}$ ，根据有两边对应成比例且夹角相等三角形相似，可得 $\triangle ABE \sim \triangle DEF$ ；

(2) 根据平行线分线段成比例定理，可得 CG 的长，即可求得 BG 的长。

【答案与解析】

(1) 证明： $\because$ ABCD 为正方形，

$$\therefore AD = AB = DC = BC, \angle A = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = ED,$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore DF = \frac{1}{4}DC,$$

$$\therefore \frac{DF}{DE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AE}{AB} = \frac{DF}{DE},$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle DEF;$$

(2) 解： $\because$ ABCD 为正方形，

$$\therefore ED \parallel BG,$$

$$\therefore \frac{ED}{CG} = \frac{DF}{CF},$$

$$\text{又} \because DF = \frac{1}{4}DC, \text{正方形的边长为 } 4,$$

$$\therefore ED = 2, CG = 6,$$

$$\therefore BG = BC + CG = 10.$$

【总结升华】考查了相似三角形的判定（有两边对应成比例且夹角相等三角形相似）、正方形的性质、平行线分线段成比例定理等知识的综合应用。解题的关键是数形结合思想的应用。

【变式】【答案】 D;

提示： $\because \angle DAE = \angle CAB$,

$\therefore$ 当 $\angle AED = \angle B$ 或 $\angle ADE = \angle C$ 时， $\triangle ABC \sim \triangle AED$;

当 $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB}$ 时， $\triangle ABC \sim \triangle AED$.

故选 D.



4、

【答案与解析】解：设 $BE=x$ ，

$$\because EF=32, GE=8,$$

$$\therefore FG=32-8=24,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle AFE \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{EF}{EB} = \frac{AF}{BC},$$

$$\therefore \text{则 } \frac{32}{x} = \frac{DF+AD}{BC} = \frac{DF}{BC} + 1 \quad ①$$

$$\because DG \parallel AB,$$

$$\therefore \triangle DFG \sim \triangle CBG,$$

$$\therefore \frac{DF}{BC} = \frac{24}{8+x} \text{ 代入 } ①$$

$$\frac{32}{x} = \frac{24}{8+x} + 1,$$

解得： $x=\pm 16$ （负数舍去），

故 $BE=16$ 。

【总结升华】此题主要考查了相似三角形的判定、平行四边形的性质，得出 $\triangle DFG \sim \triangle CBG$ 是解题关键。

【变式】【答案】解：（1） $\angle ABC=135^\circ$ ， $BC=2\sqrt{2}$ ；

（2）相似；

$$\because BC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}, EC=\sqrt{1+1}=\sqrt{2};$$

$$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \frac{BC}{DE} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2};$$

$$\therefore \frac{AB}{CE} = \frac{BC}{DE};$$

$$\text{又 } \angle ABC = \angle CED = 135^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEC.$$

类型三、三边成比例的两个三角形相似

5、

【思路点拨】（1）主要是根据勾股定理寻找规律，容易在数据中找到正确结论；

（2）在每个三角形中，根据勾股定理易求出每条边的长度，可利用三组边对应成比例，两三角形相似来判定；

（3）欲证 $\angle BEC + \angle DFE = 45^\circ$ ，在本题中等于 45° 的角有两个，即 $\angle AEB$ 和 $\angle BEF$ ，所以在证明第三个结论时，需把这两个角想法转移到已知的一个角中去，利用等腰梯形的性质求解即可。

【答案与解析】

解：（1）由勾股定理知，在第一个图形中，对角线长 $=\sqrt{2}=\sqrt{1^2+1}$ ，

第二个图形中，对角线长 $=\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1}$ ，



第三个图形中，对角线长 $=\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}$ ，

所以第 n 个图形中，对角线长 $=\sqrt{n^2+1}$ ；

(2) 在 $\triangle BCE$ 中， $BC=1$ ， $BE=\sqrt{2}$ ， $EC=\sqrt{5}$ ，

在 $\triangle BED$ 中， $BE=\sqrt{2}$ ， $BD=2$ ， $ED=\sqrt{10}$ ，

所以 $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BE} = \frac{ED}{EC} = \sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle BCE \sim \triangle BED$ ；

(3) 选取③，

$\because CD \parallel EF$ ，且 $CE=DF$ ，

$\therefore$ 四边形 $CEFD$ 为等腰梯形，

$\therefore \angle DFE = \angle CEF$ ，

$\therefore \angle BEC + \angle DFE = \angle BEC + \angle CEF = 45^\circ$.

【总结升华】 此题主要运用三边对应成比例的两个三角形相似的判定定理、勾股定理的运用、等腰梯形的性质来解决问题的.