



探索相似三角形相似的条件知识讲解

【学习目标】

1. 相似三角形的概念.
2. 相似三角形的三个判定定理.
3. 黄金分割.
4. 进一步探索相似三角形的判定及其应用, 提高运用“类比”思想的自觉性, 提高推理能力.

【要点梳理】

要点一、相似三角形的概念

相似三角形: 三个角分别相等, 三边成比例的两个三角形叫做相似三角形.

要点诠释:

(1) 书写两个三角形相似时, 要注意对应点的位置要一致, 即 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$, 则说明点 A 的对应点是 A' , 点 B 的对应点是 B' , 点 C 的对应点是 C' ;

(2) 对于相似比, 要注意顺序和对应的问题, 如果两个三角形相似, 那么第一个三角形的一边和第二个三角形的对应边的比叫做第一个三角形和第二个三角形的相似比. 当相似比为 1 时, 两个三角形全等.

要点二、相似三角形的三个判定定理

定理: 两角分别相等的两个三角形相似.

两边成比例且夹角相等的两个三角形相似.

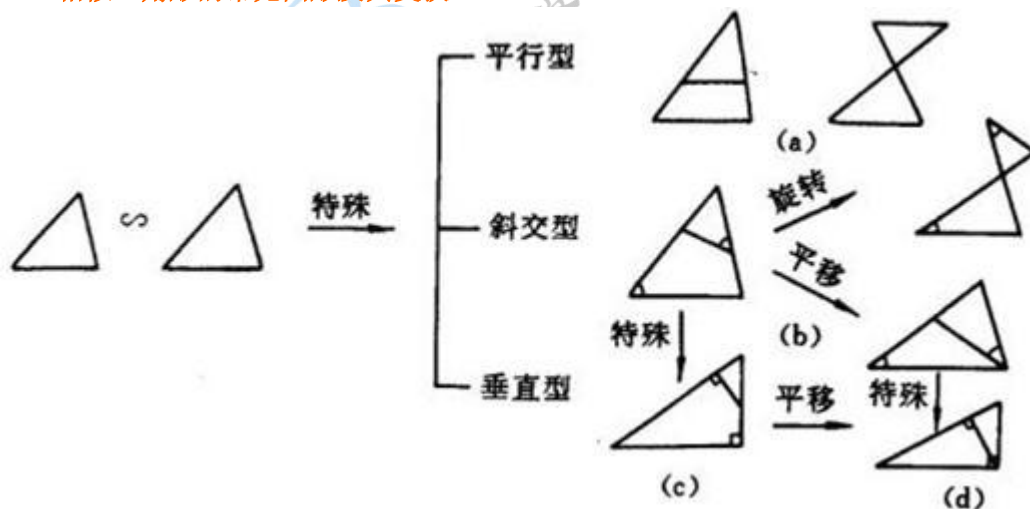
三边成比例的两个三角形相似.

要点诠释:

(1) 要判定两个三角形是否相似, 只需找到这两个三角形的两个对应角相等即可, 对于直角三角形而言, 若有一个锐角对应相等, 那么这两个三角形相似.

(2) 此方法要求用三角形的两边及其夹角来判定两个三角形相似, 应用时必须注意这个角必需是两边的夹角, 否则, 判断的结果可能是错误的.

要点三、相似三角形的常见图形及其变换:



要点四、黄金分割

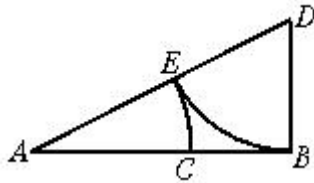
1. 定义: 一般地, 点 C 把线段 AB 分成两条线段 AC 和 BC 两段, 如果 $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AC}$, 那么线段 AB 被点 C 黄金分割, 点 C 叫做线段 AB 的黄金分割点, AC 与 AB 的比叫做黄金比.

要点诠释:



$AC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} AB \approx 0.618AB$ (0.618 是黄金分割的近似值, $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 是黄金分割的准确值).

2. 作一条线段的黄金分割点:



如图, 已知线段 AB , 按照如下方法作图:

- (1) 经过点 B 作 $BD \perp AB$, 使 $BD = \frac{1}{2} AB$.
- (2) 连接 AD , 在 DA 上截取 $DE = DB$.
- (3) 在 AB 上截取 $AC = AE$. 则点 C 为线段 AB 的黄金分割点.

要点诠释:

一条线段的黄金分割点有两个.

【典型例题】

类型一、相似三角形的概念

1. 下列能够相似的一组三角形为().

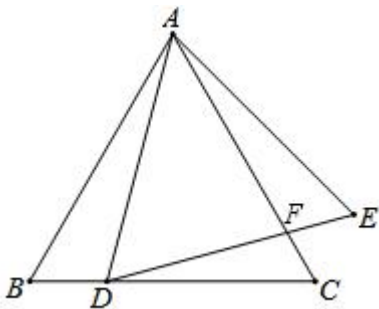
- A. 所有的直角三角形 B. 所有的等腰三角形
C. 所有的等腰直角三角形 D. 所有的一边和这边上的高相等的三角形

【变式】给出下列几何图形: ①两个圆; ②两个正方形; ③两个矩形; ④两个正六边形; ⑤两个等边三角形; ⑥两个直角三角形; ⑦两个菱形. 其中, 一定相似的有_____ (填序号).

类型二、相似三角形的三个判定定理

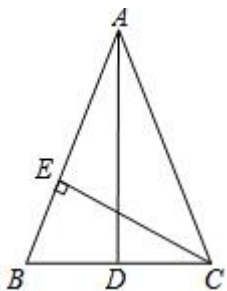
2. 如图, 点 D 在等边 $\triangle ABC$ 的 BC 边上, $\triangle ADE$ 为等边三角形, DE 与 AC 交于点 F .

- (1) 证明: $\triangle ABD \sim \triangle DCF$;
- (2) 除了 $\triangle ABD \sim \triangle DCF$ 外, 请写出图中其他所有的相似三角形.

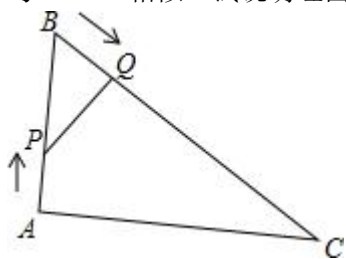




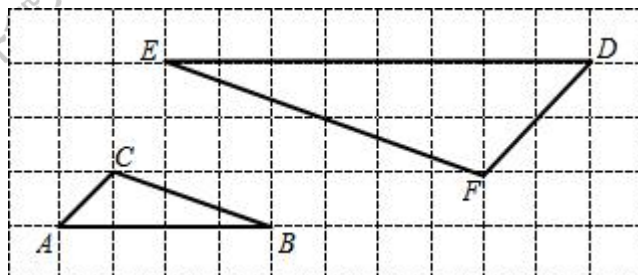
【变式】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $BD=CD$ ， $CE \perp AB$ 于 E 。求证： $\triangle ABD \sim \triangle CBE$ 。



3、如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=8\text{cm}$ ， $BC=16\text{cm}$ ，点 P 从点 A 开始沿边 AB 向点 B 以 1cm/s 的速度移动，点 Q 从点 B 开始沿边 BC 向点 C 以 2cm/s 的速度移动，如果点 P 、 Q 同时出发，经过多长时间后， $\triangle PBQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似？试说明理由。



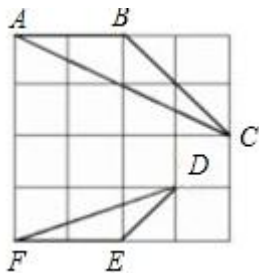
4、网格图中每个方格都是边长为1的正方形。若 A ， B ， C ， D ， E ， F 都是格点，试说明 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ 。



【变式】如图所示，在 4×4 的正方形方格中， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的顶点都在边长为1的小正方形的顶点上。

(1) 填空： $\angle ABC = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ ；

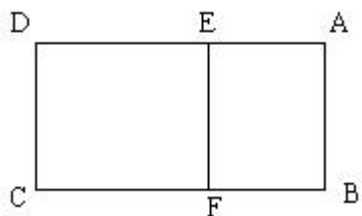
(2) 判断 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 是否相似？并证明你的结论。





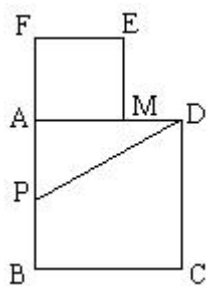
类型三、黄金分割

5. 如图所示, 矩形 ABCD 是黄金矩形 (即 $\frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$), 如果在其内作正方形 CDEF, 得到一个小矩形 ABFE, 试问矩形 ABFE 是否也是黄金矩形?



【变式】以长为 2 的线段 AB 为边作正方形 ABCD, 取 AB 的中点 P, 连接 PD, 在 BA 的延长线上取点 F, 使 $PF = PD$, 以 AF 为边作正方形 AMEF, 点 M 在 AD 上, 如图所示,

- (1) 求 AM, DM 的长,
- (2) 试说明 $AM^2 = AD \cdot DM$
- (3) 根据 (2) 的结论, 你能找出图中的黄金分割点吗?



6. 美是一种感觉, 当人体下半身长与身高的比值越接近 0.618 时, 越给人一种美感. 某女士身高 165cm, 下半身长 x 与身高 l 的比值是 0.60, 为了尽可能达到好的效果, 她应穿的高跟鞋的高度大约为 ().

- A. 4cm B. 6cm C. 8cm D. 10cm



探索相似三角形相似的条件知识讲解

类型一、相似三角形的概念

1.

【答案】C

【解析】A中只有一组直角相等，其他的角是否对应相等不可知；

B中什么条件都不满足；D中只有一条对应边的比相等；

C中所有三角形都是由 90° 、 45° 、 45° 角组成的三角形，且对应边的比也相等.

答案选C.

【总结升华】根据相似三角形的概念，判定三角形是否相似，一定要满足三个角对应相等，三条对应边的比相等.

【变式】【答案】①②④⑤.

类型二、相似三角形的三个判定定理

2、

【思路点拨】(1) 利用等边三角形的性质以及相似三角形的判定方法两角对应相等的两三角形相似得出即可；

(2) 利用对顶角的性质以及相似三角形的性质进而判断得出即可.

【答案与解析】

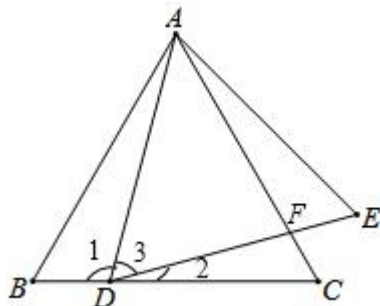
(1) 证明：∵ $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 为等边三角形，

∴ $\angle B = \angle C = \angle 3 = 60^\circ$ ，

∴ $\angle 1 + \angle 2 = \angle DFC + \angle 2$ ，

∴ $\angle 1 = \angle DFC$ ，

∴ $\triangle ABD \sim \triangle DCF$ ；



(2) 解：∵ $\angle C = \angle E$ ， $\angle AFE = \angle DFC$ ，

∴ $\triangle AEF \sim \triangle DCF$ ，

∴ $\triangle ABD \sim \triangle AEF$ ，

故除了 $\triangle ABD \sim \triangle DCF$ 外，图中相似三角形还有： $\triangle AEF \sim \triangle DCF$ ， $\triangle ABD \sim \triangle AEF$ 。

【总结升华】此题主要考查了相似三角形的两个对应角相等的判定方法以及等边三角形的性质等知识，得出对应角关系是解题关键.



【变式】【答案】

证明：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $BD=CD$ ，

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore CE \perp AB,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle CBE.$$

3、

【思路点拨】首先设经 x 秒钟 $\triangle PBQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似，由题意可得 $AP=x\text{cm}$ ， $BQ=2x\text{cm}$ ， $BP=AB-AP=(8-x)\text{cm}$ ，又由 $\angle B$ 是公共角，分别从 $\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$ 或 $\frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BA}$ 分析，即可求得答案。

【答案与解析】

解：设经 x 秒钟 $\triangle PBQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似，

$$\text{则 } AP=x\text{cm}, BQ=2x\text{cm},$$

$$\therefore AB=8\text{cm}, BC=16\text{cm},$$

$$\therefore BP=AB-AP=(8-x)\text{cm},$$

$$\therefore \angle B \text{ 是公共角},$$

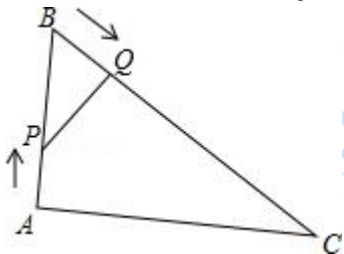
$$\therefore \text{① 当 } \frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}, \text{ 即 } \frac{8-x}{8}=\frac{2x}{16} \text{ 时, } \triangle PBQ \sim \triangle ABC,$$

解得： $x=4$ ；

$$\text{② 当 } \frac{BP}{BC}=\frac{BQ}{BA}, \text{ 即 } \frac{8-x}{16}=\frac{2x}{8} \text{ 时, } \triangle QBP \sim \triangle ABC,$$

解得： $x=1.6$ ，

$\therefore$ 经 4 或 1.6 秒钟 $\triangle PBQ$ 与 $\triangle ABC$ 相似。



【总结升华】此题考查了相似三角形的判定．属于动点型题目，注意掌握数形结合思想、分类讨论思想与方程思想的应用。

4、

【思路点拨】利用图形与勾股定理可以推知图中两个三角形的三条对应边成比例，由此可以证得 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ．

【答案与解析】

证明： $\because AC=\sqrt{2}$ ， $BC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ ， $AB=4$ ， $DF=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ ， $EF=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$ ， $ED=8$ ，

$$\therefore \frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}=\frac{AB}{DE}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

【总结升华】本题考查了相似三角形的判定、勾股定理．相似三角形相似的判定方法有：



(1) 平行线法：平行于三角形的一边的直线与其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似；

这是判定三角形相似的一种基本方法．相似的基本图形可分别记为“A”型和“X”型，如图所示在应用时要善于从复杂的图形中抽象出这些基本图形；

(2) 三边法：三组对应边的比相等的两个三角形相似；

(3) 两边及其夹角法：两组对应边的比相等且夹角对应相等的两个三角形相似；

(4) 两角法：有两组角对应相等的两个三角形相似．

本题是在网格状中的两个三角形，优先考虑三边对应成比例的方法去考虑．

【变式】【答案】

(1) 解： $\angle ABC = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ，

$$BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}；$$

故答案为： 135° ； $2\sqrt{2}$ ．

(2) $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ．

证明： $\because$ 在 4×4 的正方形方格中，
 $\angle ABC = 135^\circ$ ， $\angle DEF = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABC = \angle DEF$ ．

$$\because AB = 2, BC = 2\sqrt{2}, FE = 2, DE = \sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = \frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{BC}{FE} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DEF.$$

类型三、黄金分割

5.

【思路点拨】(1) 矩形的宽与长之比为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ，则这种矩形叫做黄金矩形．

(2) 要说明 ABFE 是不是黄金矩形只要证明 $\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 即可．

【答案与解析】矩形 ABFE 是黄金矩形．

理由如下：因为 $\frac{AE}{AB} = \frac{AD-ED}{AB} = \frac{AD}{AB} - \frac{ED}{AB}$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}-1} - 1 = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

所以矩形 ABFE 也是黄金矩形．

【总结升华】判断四边形是否是黄金矩形，要根据实际条件灵活选择判断方法．



【变式】【答案】(1) $\because$ 正方形 ABCD 的边长是 2, P 是 AB 中点,
 $\therefore AD=AB=2, AP=1, \angle BAD=90^\circ$,

$$\therefore PD = \sqrt{AP^2 + AD^2} = \sqrt{5}.$$

$$\because PF=PD,$$

$$\therefore AF = \sqrt{5} - 1$$

, 在正方形 ABCD 中, $AM=AF=\sqrt{5}-1, MD=AD-AM=3-\sqrt{5}$

(2) 由 (1) 得 $AD \times DM = 2(3-\sqrt{5}) = 6-2\sqrt{5}$,

$$AM^2 = (\sqrt{5}-1)^2 = 6-2\sqrt{5}$$

$$\therefore AM^2 = AD \cdot DM.$$

(3) 如图中的 M 点是线段 AD 的黄金分割点.

6.

【答案】C.

【解析】利用 $\frac{x}{l}=0.618$, 列方程求解.

设她应穿的高跟鞋的高度为 y , 则 $\frac{y+165 \times 0.60}{y+165} = 0.618$, 解得 $y \approx 8$.

【总结升华】黄金分割知识的理解和运用要结合实际.