



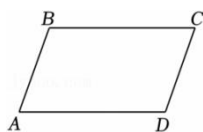
湘教版九上数学月考卷（五）

一、选择题

1. 下列 y 关于 x 的函数中，二次函数是（ ）

- A. $y = \frac{1}{x}$ B. $y = x + 1$ C. $y = 2x^2 - 1$ D. $y = \frac{2}{3}x$

2. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle B = 140^\circ$ ，则 $\angle D$ 的度数为（ ）

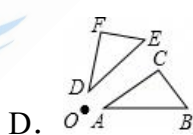
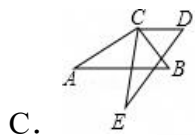
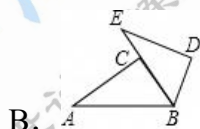
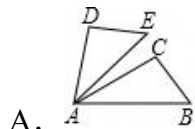


- A. 40° B. 70° C. 110° D. 140°

3. 抛物线 $y = 2(x - 1)^2 + 3$ 的对称轴为（ ）

- A. 直线 $x = 1$ B. 直线 $y = 1$ C. 直线 $x = -1$ D. 直线 $y = -1$

4. 下列旋转中，旋转中心为点 A 的是（ ）



5. 以下列各组数为边长的三角形中，是直角三角形的是（ ）

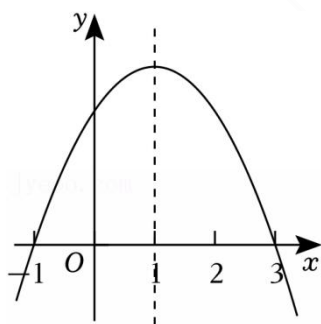
- A. 2, 3, 4 B. 3, 4, 5 C. 5, 12, 16 D. 6, 8, 12

6. 平行四边形、矩形、菱形、正方形都具有的性质是（ ）

- A. 对角线互相平分
B. 对角线互相垂直
C. 对角线相等
D. 对角线互相垂直平分且相等



7. 在一次射击比赛中, 甲、乙两名运动员 10 次射击的平均成绩都是 9 环, 其中甲成绩的方差为 1.21, 乙成绩的方差为 3.98, 由此可知 ()
- A. 甲比乙的成绩稳定
B. 乙比甲的成绩稳定
C. 甲、乙两人的成绩一样稳定
D. 无法确定谁的成绩更稳定
8. 已知 $x=1$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx=0$ 的一个根, 则 m 的值是 ()
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
9. 某校每年举行“节省一元钱, 温暖一颗心”爱心捐款活动, 号召全体师生奉献爱心, 以帮助有需要的学生. 某班级在七年级参与这项活动时, 捐款总数为 1000 元, 而到了九年级班级捐款总数为 1440 元. 若这个班级的捐款总数年平均增长率为 x , 则下列方程正确的是 ()
- A. $1000(1+x)^2=1440-1000\%$
B. $1000(1+2x)=1440$
C. $1000(1+x)^2=1440$
D. $1440(1-x)^2=1000$
10. 如图为二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象, 则下列说法: ① $abc > 0$; ② $2a+b=0$; ③ $b^2-4ac < 0$; ④ $a-b+c=0$; ⑤ $8a+c < 0$; 其中正确的个数为 ()



- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个



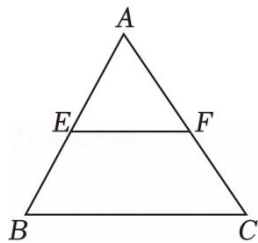
二、填空题

11. 函数 $y = \sqrt{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围是 _____ .

12. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 =$ _____ .

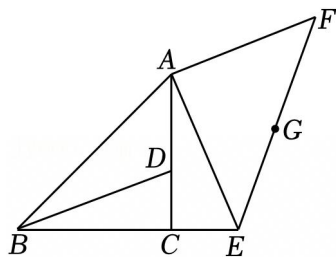
13. 若点 $A(1, y_1)$ 和点 $B(3, y_2)$ 在函数 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ 的图象上, 则 y_1 _____ y_2 . (填“>”, “<”或“=”)

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, E, F 分别是 AB, AC 的中点, 若中位线 $EF = 2\text{cm}$, 则 BC 边的长是 _____ .



15. 已知抛物线 $y = x^2 + 2x + k - 1$ 与 x 轴有两个交点, 则 k 的取值范围是 _____ .

16. 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $AB = 2\sqrt{2}$, D 为线段 CA 上一动点, E 为 BC 延长线上的动点, 始终保持 $CE = CD$. 连接 BD 和 AE , 将 AE 绕 A 点逆时针旋转 90° 到 AF , 连接 EF , G 为 EF 中点, 当 D 从点 C 运动到点 A 时, 点 G 所经过的路径长为 _____ .

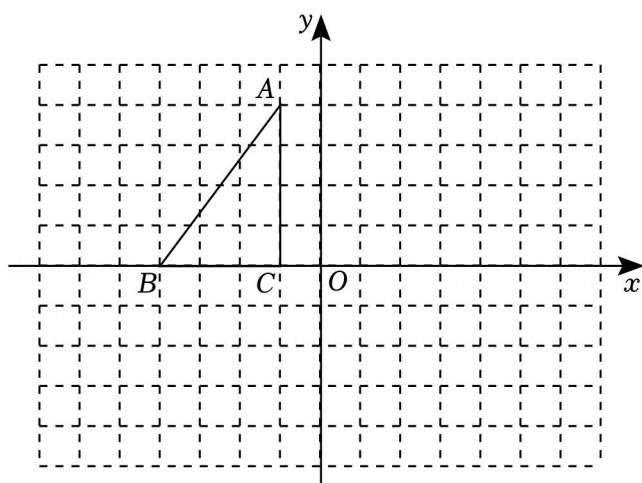




三、解答题

17. 解方程: $x^2 - 4x - 5 = 0$.

18. 如图, 在平面直角坐标系中, $A(-1, 4)$, $B(-4, 0)$, $C(-1, 0)$.



(1) 画出 $\triangle ABC$ 绕原点 O 顺时针旋转 180° 得到的 $\triangle A_1B_1C_1$, 并写出点 A_1 、 B_1 、 C_1 的坐标;

(2) 求 $\triangle A_1BC$ 的面积.

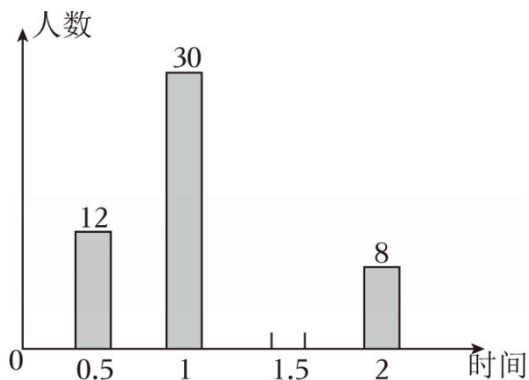


19. 先化简，再求值： $(x-3)^2 + x(2+x) - 9$ ，其中 $x = -\sqrt{3}$.

20. 2022 年 3 月 25 日，教育部印发《义务教育课程方案和课程标准（2022 年版）》，优化了课程设置，将劳动从综合实践活动课程中独立出来. 某校为了解该校学生一周的课外劳动情况，随机抽取部分学生调查了他们一周的课外劳动时间，并用得到的数据绘制成如下不完整的统计图表：

劳动时间（时）	频数（人数）	频率
0.5	12	0.12
1	30	0.3
1.5	x	0.5
2	8	y
合计	m	1

- 统计表中的 $m = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $x = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $y = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- 被抽样调查的同学劳动时间的众数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ，中位数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ ；
- 请将条形图补充完整；
- 求所有被调查同学的平均劳动时间.



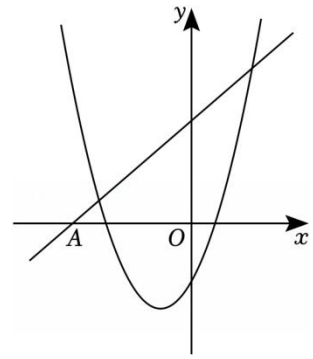




21. 已知一次函数 $y=x+b$ 的图象经过点 $A(-4, 0)$.

(1) 求 b 的值;

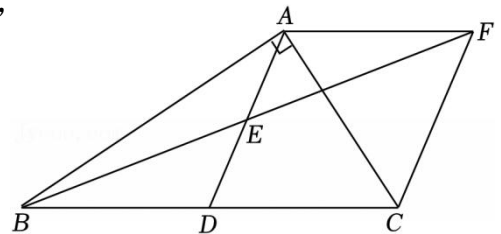
(2) 求一次函数与二次函数 $y=x^2+2x-2$ 的图象的交点坐标.



22. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, D 是 BC 的中点, E 是 AD 的中点, 过点 A 作 $AF \parallel BC$ 交 BE 的延长线于点 F .

(1) 求证: $BE=EF$;

(2) 求证: 四边形 $ADCF$ 是菱形.





23. 目前正在杭州举办的亚运会令世界瞩目，吉祥物“琮琤”、“莲莲”、“宸宸”家喻户晓，其相关产品成为热销产品. 某商家进购了一批吉祥物钥匙扣，进价为每个 32 元. 若该钥匙扣每个的售价是 48 元时，每天可售出 200 个；若每个售价提高 2 元，则每天少卖 4 个.

- (1) 设该吉祥物钥匙扣每个售价定为 x 元时，求该商品销售量 y 与 x 之间的函数关系式；
(2) 求每个售价定为多少元时，每天销售玩偶所获利润 W 最大，最大利润是多少元？



宸宸



琮琤



莲莲





24. 已知二次函数 $y=2x^2+bx+c$ (b, c 是常数)

(1) 若 $A(1, 0)$, $B(0, 4)$ 两点在该二次函数图象上, 求二次函数的表达式.

(2) 若二次函数的表达式可以写成 $y=2(x-h)^2-2$ 的形式 (h 是常数), 求 $b+c$ 的最小值.

(3) 若二次函数的表达式还可以写成 $y=2(x-m)(x-m-k)$, 它的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过点 A , 且与二次函数的图象交于另一点 C . 是否存在实数 k , 使得 $\triangle ABC$ 是以 AB 为腰的等腰三角形, 如果存在, 求出 k 的值; 如果不存在, 请说明理由.



25. 如图 1, 四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $CB=CD$, 我们就把这种两组邻边分别相等的四边形叫做筝形.

(1) 根据筝形的定义, 下列图形中是筝形的有 _____ (填写序号);

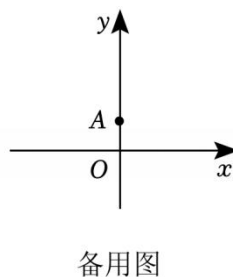
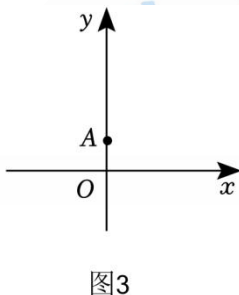
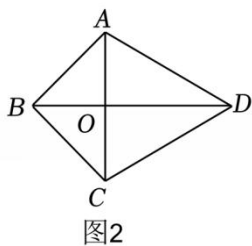
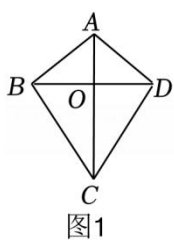
①平行四边形; ②菱形; ③矩形; ④正方形.

(2) 如图 2, 若四边形 $ABCD$ 的内角满足 $\angle ABC : \angle BAD : \angle ADC : \angle BCD = 6 : 7 : 4 : 7$, 连接 BD , AC 交于点 O , 且 BD 平分 $\angle ABC$.

①求证: 四边形 $ABCD$ 是筝形;

②若四边形 $ABCD$ 的面积为 $4\sqrt{3} + 4$, 求四边形 $ABCD$ 的周长;

(3) 如图 3, 在平面直角坐标系中, 点 A 的坐标为 $(0, 2)$. 在 x 轴上任取一点 M , 以 AM 为对角线作筝形 $APMN$, 满足 $AP=PM$, 且 $PM \perp x$ 轴. 在 x 轴上取几个不同位置的点 M , 得到相应的点 P , 发现这些点 P 在一条曲线 L 上. 若点 P_1, P_2, P_3 是上述曲线 L 上的三个不同的点, 它们的横坐标分别为 $t, t+1, t+a$, 其中 $\sqrt{2} \leq a \leq 4$, 求 $S_{\triangle P_1 P_2 P_3}$ 的最大值.





湘教版九上数学月考卷（五）

参考答案与试题解析

一、选择题

1. 【分析】根据二次函数的一般形式：形如 $y=ax^2+bx+c$ (a, b, c 为常数且 $a \neq 0$)，逐一判断即可解答.

【解答】解：A、 $y=\frac{1}{x}$ ，是反比例函数，故 A 不符合题意；

B、 $y=x+1$ ，是一次函数，故 B 不符合题意；

C、 $y=2x^2+1$ ，是二次函数，故 C 符合题意；

D、 $y=\frac{2}{3}x$ ，是一次函数，故 D 不符合题意；

故选：C.

【点评】本题考查了二次函数的定义，熟练掌握二次函数的一般形式是解题的关键.

2. 【分析】根据平行四边形的性质：平行四边形的对角相等直接解答即可.

【解答】解： $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$$\therefore \angle D = \angle B = 140^\circ,$$

故选：D.

【点评】此题主要考查了平行四边形的性质，灵活的应用平行四边形的性质是解决问题的关键.

3. 【分析】由二次函数的顶点式可直接求得答案.

【解答】解： $\because y = -2(x-1)^2+3$,

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x=1$,

故选：A.

【点评】本题考查二次函数的性质，掌握二次函数的顶点式是解题的关键，即在 $y=a(x-h)^2+k$ 中对称轴为直线 $x=h$ ，顶点坐标为 (h, k) .

4. 【分析】根据旋转的性质可得解.

【解答】解：A、旋转中心为点 A，符合题意；

B、旋转中心为点 B，不符合题意；

C、旋转中心为 C，不符合题意；



D、旋转中心为 O，不符合题意；

故选：A.

【点评】本题考查了旋转的性质，熟练运用旋转的性质是本题的关键.

5. 【分析】根据勾股定理的逆定理对各选项进行逐一判断即可.

【解答】解： $\because 2^2+3^2=13 \neq 4^2$,

$\therefore$ 不能构成直角三角形，

故 A 不符合题意；

$\because 3^2+4^2=25=5^2$,

$\therefore$ 能构成直角三角形，

故 B 符合题意；

$\because 5^2+12^2=169 \neq 16^2$,

$\therefore$ 不能构成直角三角形，

故 C 不符合题意；

$\because 6^2+8^2=100 \neq 12^2$,

$\therefore$ 不能构成直角三角形，

故 D 不符合题意；

故选：B.

【点评】本题考查的是勾股定理的逆定理，熟知如果三角形的三边长 a ， b ， c 满足 $a^2+b^2=c^2$ ，那么这个三角形就是直角三角形是解答此题的关键.

6. 【分析】平行四边形、矩形、菱形、正方形都是特殊的平行四边形，因而平行四边形的性质就是四个图形都具有的性质.

【解答】解：平行四边形的对角线互相平分，而对角线相等、平分一组对角、互相垂直不一定成立.

故平行四边形、矩形、菱形、正方形都具有的性质是：对角线互相平分.

故选：A.

【点评】本题主要考查了正方形、矩形、菱形、平行四边形的性质，理解四个图形之间的关系是解题关键.

7. 【分析】根据方差的定义，方差越小数据越稳定.

【解答】解：因为 $s_{\text{甲}}^2=1.21 < s_{\text{乙}}^2=3.98$ ，方差小的为甲，所以本题中成绩比较稳定的是甲.



故选：A.

【点评】 本题考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量, 方差越大, 表明这组数据偏离平均数越大, 即波动越大, 数据越不稳定; 反之, 方差越小, 表明这组数据分布比较集中, 各数据偏离平均数越小, 即波动越小, 数据越稳定.

8. **【分析】** 把 $x=1$ 代入方程 $x^2+mx=0$, 得出一个关于 m 的方程, 解方程即可.

【解答】 解: 把 $x=1$ 代入方程 $x^2+mx=0$ 得: $1+m=0$,

解得: $m=-1$.

故选: A.

【点评】 本题考查了一元二次方程的解和解一元一次方程, 关键是能根据题意得出一个关于 m 的方程.

9. **【分析】** 根据七年级捐款总数为 1000 元, 而到了九年级班级捐款总数为 1440 元, 列一元二次方程即可.

【解答】 解: 根据题意, 得 $1000(1+x)^2=1440$,

故选: C.

【点评】 本题考查了由实际问题抽象出一元二次方程, 理解题意并根据题意建立等量关系是解题的关键.

10. **【分析】** 根据图象的开口可确定 a , 结合对称轴可确定 b , 根据图象与 y 轴的交点位置可确定 c , 根据图象与 x 轴的交点个数可确定 Δ ; 根据当 $x=-1$ 时, $y=0$, 当 $x=-2$ 时, $y<0$, 即可得出结论.

【解答】 解: $\because$ 开口向下,

$\therefore a<0$,

$\because$ 与 y 轴交于正半轴,

$\therefore c>0$,

$\because$ 对称轴在 y 轴右侧,

$\therefore b>0$,

$\therefore abc<0$, 故①错误;

$\because$ 二次函数的对称轴是直线 $x=1$, 即二次函数的顶点的横坐标为 $x=-\frac{b}{2a}=1$,

$\therefore 2a+b=0$, 故②正确;

$\because$ 函数的图象与 x 轴的有两个交点,



$\therefore \Delta = b^2 - 4ac > 0$; 故③错误;

由函数的图象知: 当 $x = -1$ 时, $y = 0$; 即 $a - b + c = 0$, 故④正确;

由函数的图象知: 当 $x = -2$ 时, $y < 0$, 即 $4a - (-4a) + c = 8a + c < 0$, 故⑤正确;

故选: C.

【点评】 本题主要考查图象与二次函数系数之间的关系, 会利用对称轴的范围求 $2a$ 与 b 的关系, 以及二次函数与方程之间的转换, 根的判别式的熟练运用.

二、填空题

11. **【分析】** 根据二次根式 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 可得 $x - 1 \geq 0$, 然后进行计算即可解答.

【解答】 解: 由题意得: $x - 1 \geq 0$,

解得: $x \geq 1$,

故答案为: $x \geq 1$.

【点评】 本题考查了函数自变量的取值范围, 熟练掌握二次根式 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 是解题的关键.

12. **【分析】** 直接根据根与系数的关系求解.

【解答】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x - 3 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 ,

$\therefore x_1 + x_2 = 4$,

故答案为 4.

【点评】 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的根与系数的关系: 若方程的两根为 x_1, x_2 , 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

13. **【分析】** 由 $k = -\frac{1}{2} < 0$, 利用一次函数的性质, 可得出 y 随 x 的增大而减小, 结合 $1 < 3$, 可得出 $y_1 > y_2$.

【解答】 解: $\because k = -\frac{1}{2} < 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而减小,

又 $\because$ 点 A ($1, y_1$) 和点 B ($3, y_2$) 在函数 $y = -\frac{1}{2}x - 1$ 的图象上, 且 $1 < 3$,

$\therefore y_1 > y_2$.

故答案为: $>$.

【点评】 本题考查了一次函数的性质, 牢记 “ $k > 0$, y 随 x 的增大而增大; $k < 0$, y 随 x 的增大而减小” 是解题的关键.



14. 【分析】由 E、F 分别是 AB、AC 的中点，可得 EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，直接利用三角形中位线定理即可求 BC.

【解答】解： $\because \triangle ABC$ 中，E、F 分别是 AB、AC 的中点， $EF=2\text{cm}$ ，

$\therefore EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线

$\therefore BC=2EF=2 \times 2=4\text{cm}$.

故答案为：4cm.

【点评】本题考查了三角形中位线的性质，三角形的中位线是指连接三角形两边中点的线段，中位线的特征是平行于第三边且等于第三边的一半.

15. 【分析】根据抛物线 $y=x^2+2x+k-1$ 与 x 轴有交点则方程 $0=x^2+2x+k-1$ 有实数根，根据根的判别式即可解答.

【解答】解： $\Delta=b^2-4ac=4-4 \times 1 \times (k-1)=8-4k$ ，

$\because$ 抛物线 $y=x^2+2x+k-1$ 与 x 轴有交点，

$\therefore \Delta=8-4k>0$ ，解得： $k<2$.

故答案为： $k<2$.

【点评】本题主要考查了二次函数与一元二次方程的关系，解题的关键是掌握二次函数与 x 轴有交点，则对应一元二次方程有实数根.

16. 【分析】求出点 G 在 $\angle ACH$ 的平分线上运动即可求得答案.

【解答】解： $\because \angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ， $AB=2\sqrt{2}$ ，

$\therefore AC=BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2$ ，

连接 AG、CG，过点 G 作 $GH \perp CE$ 交 CE 延长线于 H， $GN \perp AC$ 于 N，

$\because \angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ，

$\therefore BC=AC=4$ ，

$\because GH \perp CE$ ， $GN \perp AC$ ， $\angle ACH=90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 CHGN 是矩形，

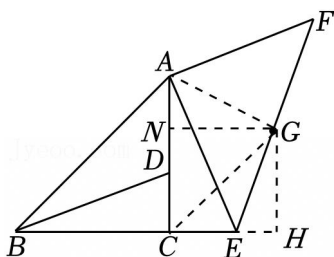
$\because AF=AE$ ， $\angle EAF=90^\circ$ ，G 是 EF 中点，

$\therefore AG=GE$ ， $AG \perp EF$ ，

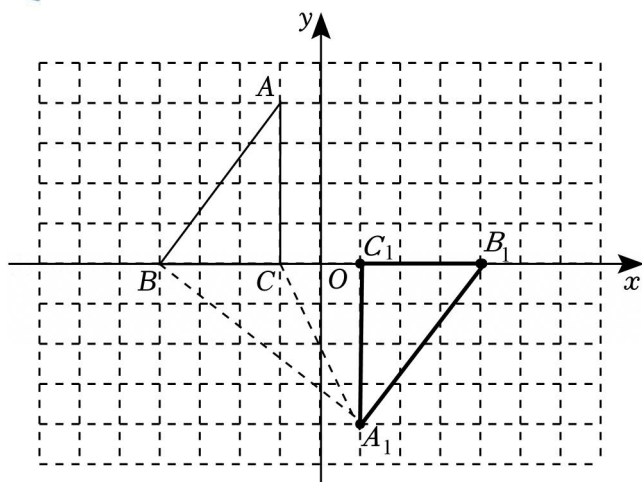
$\because \angle CAG+\angle ACH+\angle CEG+\angle AGE=360^\circ$ ，

$\therefore \angle CAG+\angle CEG=180^\circ$ ，

故答案为: $\sqrt{2}$.



第 16 页 共 27 页



$A_1(2, -4)$, $B_1(4, 0)$, $C_1(1, 0)$;

$$(2) S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6.$$

【点评】 本题考查作图 - 旋转作图，解题的关键是掌握网格的特征，求出三角形面积.

19. **【分析】** 原式利用完全平方公式，单项式乘以多项式法则计算，去括号合并得到最简结果，把 x 的值代入计算即可求出值.

【解答】 解：原式 $= x^2 - 6x + 9 + 2x + x^2 - 9 = 2x^2 - 4x$,

当 $x = -\sqrt{3}$ 时，原式 $= 6 + 4\sqrt{3}$.

【点评】 此题考查了整式的混合运算 - 化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. **【分析】** (1) 用劳动时间为 0.5 小时的人数除以频率即可求出总人数 m 的值，用总人数乘以 0.5 求 x 的值，用 8 除以总人数求 y 的值；
(2) 根据中位数与众数的意义结合统计图即可求解；
(3) 根据 x 的值即可将条形图补充完整；
(4) 根据平均数的公式计算即可求解.

【解答】 解：(1) $m = 12 \div 0.12 = 100$, $x = 100 \times 0.5 = 50$, $y = 8 \div 100 = 0.08$;

故答案为：100, 50, 0.08;

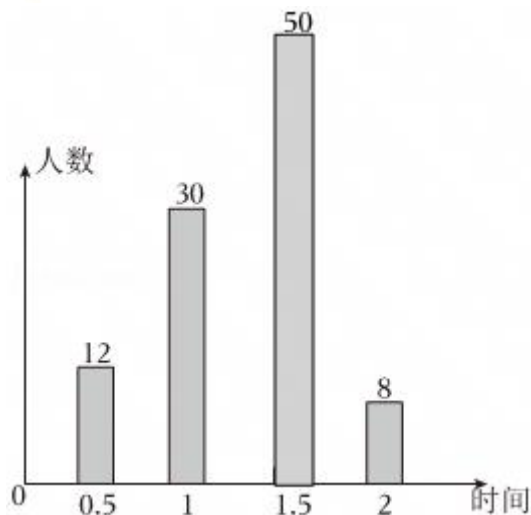
(2) $\because$ 劳动时间为 1.5 小时的人数最多，

$\therefore$ 劳动时间的众数是 1.5，

中位数是 $\frac{1.5+1.5}{2} = 1.5$;

故答案为：1.5, 1.5;

(3) 根据 (1) 可将条形图补充完整：



$$(4) \frac{0.5 \times 12 + 1 \times 30 + 1.5 \times 50 + 2 \times 8}{100} = 1.27 \text{ (小时)},$$

答：所有被调查同学的平均劳动时间是 1.27 小时。

【点评】 本题主要考查了条形统计图和频数（率）分布表的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键，条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据。

21. **【分析】** (1) 把 $A(-4, 0)$ 代入 $y=x+b$ 即可求出答案；

(2) 通过解方程组 $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$ ，可求出图象的交点坐标。

【解答】 解：(1) 把 $A(-4, 0)$ 代入 $y=x+b$ ，

得 $-4+b=0$ ，

解得 $b=4$ ；

(2) 联立得： $\begin{cases} y = x + 4 \\ y = x^2 + 2x - 2 \end{cases}$ ，

整理得： $x^2 + 2x - 2 = x + 4$ ，

即 $x^2 + x - 6 = 0$ ，

解得： $x_1 = -3$ ， $x_2 = 2$ ，

$\therefore$ 方程组的解为： $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 交点坐标为： $(-3, 1)$ 和 $(2, 6)$ 。

【点评】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式，利用二元一次方程组求交点坐标，需熟练掌握并灵活运用。

22. **【分析】** (1) 根据 AAS 证 $\triangle BDE \cong \triangle FAE$ ，从而得出结论；



(2) 利用 (1) 中全等三角形的对应边相等得到 $AF=BD$. 结合已知条件, 利用“有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形”得到 $ADCF$ 是菱形, 由“直角三角形斜边的中线等于斜边的一半”得到 $AD=DC$, 从而得出结论.

【解答】(1) 证明: $\because AF \parallel BC$,

$\therefore \angle DBE = \angle AFE$,

$\because E$ 是 AD 的中点,

$\therefore DE = AE$,

在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle FAE$ 中,

$$\begin{cases} \angle DBE = \angle AFE \\ \angle BED = \angle FEA \\ DE = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle FAE$ (AAS),

$\therefore BE = EF$.

(2) 证明: $\because \triangle BDE \cong \triangle FAE$,

$\therefore BD = FA$,

$\because CD = BD$,

$\therefore FA = CD$,

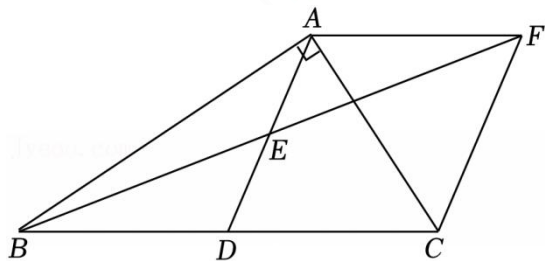
$\because AF \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是平行四边形,

$\angle BAC = 90^\circ$, $CD = BD$,

$AD = \frac{1}{2}AB = CD$,

$\therefore$ 四边形 $ADCF$ 是菱形.



【点评】 本题考查了全等三角形的性质和判定, 平行四边形的判定, 菱形的判定的应用, 主要考查学生的推理能力.

23. **【分析】**(1) 根据该钥匙扣每个的售价是 48 元时, 每天可售出 200 个; 若每个售价提高 2



元，则每天少卖 4 个进行求解即可；

(2) 根据利润 = (售价 - 进价) × 数量，列出 W 关于 x 的二次函数关系，利用二次函数的性质求解即可。

【解答】解：(1) 根据题意，得 $y = 200 - \frac{1}{2} \times 4(x - 48) = -2x + 296$ ，

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式： $y = -2x + 296$ ；

(2) 根据题意，得： $W = (x - 32)(-2x + 296) = -2(x - 90)^2 + 6728$ ，

$\because a = -2 < 0$ ，

$\therefore$ 抛物线开口向下， W 有最大值，

当 $x = 90$ 时， $W_{\text{最大值}} = 6728$ ，

答：每个售价定为 90 元时，每天销售玩偶所获利润 W 最大，最大利润是 6728 元。

【点评】 本题主要考查了二次函数的实际应用，正确理解题意列出对应的函数关系式是解答本题的关键。

24. **【分析】** (1) 运用待定系数法即可求得答案；

(2) 根据题意得： $b = -4h$ ， $c = 2h^2 - 2$ ， $b + c = 2h^2 - 4h - 2 = 2(h - 1)^2 - 4$ 。利用二次函数的性质即可求得答案；

(3) 分两种情况：①当 $k > 0$ 时，(i) 点 $A(m, 0)$ ， $B(m + k, 0)$ ，则一次函数解析式可以表示为 $y = k(x - m)$ ，联立方程组求解可得出 $C(m + \frac{3}{2}k, \frac{3}{2}k^2)$ ，根据图象可知：当三角形是以 AB 为腰的等腰三角形时，则只能 $AB = BC$ ，过点 C 作 $CD \perp x$ 轴，利用勾股定理建立方程求解即可；(ii) 若点 $A(m + k, 0)$ ， $B(m, 0)$ ，则一次函数解析式可以表示为 $y = k(x - m - k)$ ，联立方程组求解可得出 $C(m + \frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}k^2)$ ，与抛物线的顶点重合，故 $AC = BC$ ，过点 C 作 $CD \perp x$ 轴，再利用勾股定理建立方程求解即可；②当 $k < 0$ 时，同理可求得答案。

【解答】解：(1) $\because$ 二次函数 $y = 2x^2 + bx + c$ 过点 $A(1, 0)$ 、 $B(0, 4)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 2 + b + c = 0 \\ c = 4 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = -6 \\ c = 4 \end{cases},$$

$\therefore$ 该二次函数的表达式为 $y = 2x^2 - 6x + 4$ 。

(2) 把 $y = 2(x - h)^2 - 2$ 化成一般式得， $y = 2x^2 - 4hx + 2h^2 - 2$ ，



$$\therefore b = -4h, c = 2h^2 - 2,$$

$$\therefore b+c = 2h^2 - 4h - 2 = 2(h-1)^2 - 4.$$

把 $b+c$ 的值看作是 h 的二次函数, 则该二次函数开口向上, 有最小值,

$\therefore$ 当 $h=1$ 时, $b+c$ 的最小值是 -4 .

(3) 存在, 理由:

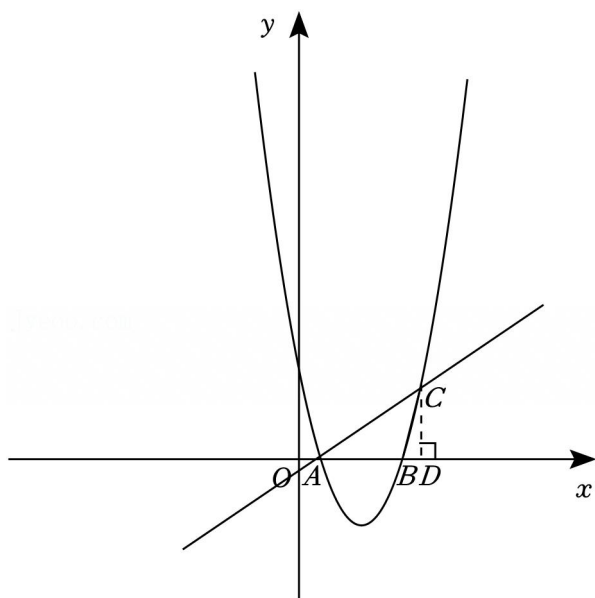
① 当 $k>0$ 时,

(i) 点 $A(m, 0)$, $B(m+k, 0)$, 则一次函数解析式可以表示为 $y=k(x-m)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = 2(x-m)(x-m-k) \\ y = k(x-m) \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = m \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = m + \frac{3}{2}k \\ y_2 = \frac{3}{2}k^2 \end{cases},$$

$$\therefore C(m + \frac{3}{2}k, \frac{3}{2}k^2),$$



由图可知, 当三角形是以 AB 为腰的等腰三角形时, 则只能 $AB=BC$,

过点 C 作 $CD \perp x$ 轴,

$$\text{则 } CD = \frac{3}{2}k^2, BD = m + \frac{3}{2}k - (m+k) = \frac{1}{2}k,$$

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 = (\frac{3}{2}k^2)^2 + (\frac{1}{2}k)^2 = \frac{9}{4}k^4 + \frac{1}{4}k^2,$$

$$\because AB = m+k - m = k, AB = BC,$$

$$\therefore k^2 = \frac{9}{4}k^4 + \frac{1}{4}k^2,$$



$$\therefore k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\because k > 0,$$

$$\therefore k = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

(ii) 若点 A (m+k, 0), B (m, 0), 则一次函数解析式可以表示为 $y = k(x - m - k)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = 2(x - m)(x - m - k) \\ y = k(x - m - k) \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = m + k \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = m + \frac{1}{2}k \\ y_2 = -\frac{1}{2}k^2 \end{cases},$$

$$\therefore C \left(m + \frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}k^2 \right),$$

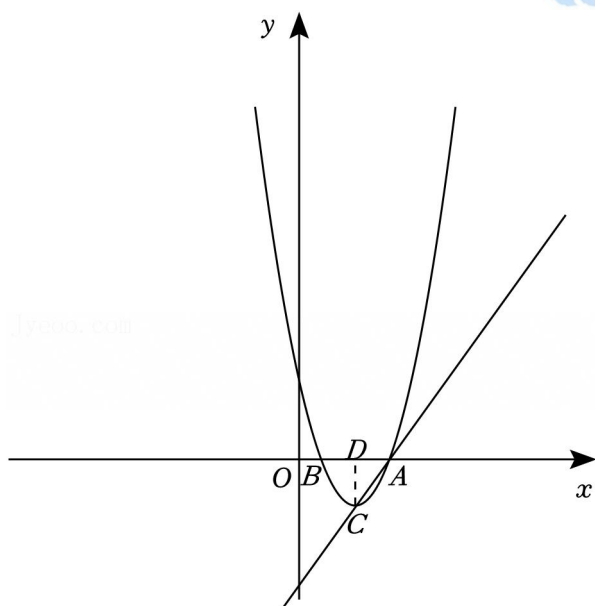
$$\because y = 2(x - m)(x - m - k),$$

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = m + \frac{1}{2}k, \text{ 顶点坐标为 } \left(m + \frac{1}{2}k, -\frac{1}{2}k^2 \right),$$

即点 C 恰好是抛物线顶点,

$$\therefore \text{总是有 } AC = BC,$$

过点 C 作 $CD \perp x$ 轴, 如图,



$$\text{则 } CD = \frac{1}{2}k^2, BD = m + \frac{1}{2}k - m = \frac{1}{2}k,$$

$$\therefore BC^2 = CD^2 + BD^2 = \left(\frac{1}{2}k^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{2}k \right)^2 = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{4}k^2,$$

$$\because AB = k, AB = BC,$$



$$\therefore k^2 = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{4}k^2,$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{3},$$

$$\because k > 0,$$

$$\therefore k = \sqrt{3};$$

②当 $k < 0$ 时,

$$\text{同理可得: } k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } -\sqrt{3};$$

$$\therefore \text{综上所述, } k = \pm\sqrt{3} \text{ 或 } \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【点评】 本题是二次函数综合题, 考查了待定系数法求函数解析式, 二次函数的图象与性质, 一次函数与二次函数图象的交点, 等腰三角形性质等, 熟练掌握二次函数的图象与性质, 利用分类讨论思想是解题的关键.

25. **【分析】** (1) 根据筝形的定义, 即可判断得出结论;

(2) ①根据四边形的内角和为 360° 及已知条件可得: $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAD = 105^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$, $\angle BCD = 105^\circ$, 即 $\angle BAD = \angle BCD$, 再由角平分线定义可得 $\angle ABD = \angle CBD$, 即可证得 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (AAS), 得出 $AB = BC$, $AD = CD$, 利用筝形的定义即可证得结论;

②设 $AO = x$, 则 $BO = CO = x$, $AD = AC = 2x$, 利用勾股定理可得 $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$, 可得 $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2x(\sqrt{3} + 1)x = (\sqrt{3} + 1)x^2$, 由 $S_{\text{四边形}ABCD} = 4\sqrt{3} + 4$, 建立方程可求得 $x = 2$, 再利用 $C_{\text{四边形}ABCD} = AB + BC + CD + AD$ 即可求得答案;

(3) 设点 $P(x, y)$, 由 $PM \perp x$ 轴, 可得点 M 的坐标为 $(x, 0)$, 进而可得 $PA^2 = (x - 0)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 4y + 4$, $PM^2 = (x - x)^2 + (y - 0)^2 = y^2$, 由筝形的定义可得 $PA = PM$, 即可求得 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$, 设 $P_1(t, y_1)$, $P_2(t+1, y_2)$, $P_3(t+a, y_3)$, 过点 P_2 作 x 轴的垂线交直线 P_1P_3 于点 Q . 利用待定系数法可得直线 P_1P_3 的解析式为 $y = \frac{y_3 - y_1}{a}x + y_1 - \frac{t(y_3 - y_1)}{a}$, 令 $x = t+1$, 得 $y = \frac{y_3 - y_1}{a} + y_1$, 可得 $Q(t+1, \frac{y_3 - y_1}{a} + y_1)$, 进而得出 $P_2Q = \frac{y_3 - y_1}{a} + y_1 - y_2 = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}$, 则 $S_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}P_2Q \cdot (t+a - t) = \frac{1}{8}(a - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{32}$, 应用二次函数性质即可求得答案.

【解答】 (1) 解: $\because AB = AD$, $CB = CD$,



∴ AC 垂直平分 BD,

即 $AC \perp BD$, $OB = OD$,

∴ 菱形、正方形是筝形,

故答案为: ②④.

(2) ①证明: ∵ 四边形 ABCD 的内角和为 360° 且满足 $\angle ABC : \angle BAD : \angle ADC : \angle BCD = 6 : 7 : 4 : 7$,

∴ $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAD = 105^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$, $\angle BCD = 105^\circ$,

∴ $\angle BAD = \angle BCD$,

∵ BD 平分 $\angle ABC$,

∴ $\angle ABD = \angle CBD$,

∵ $BD = BD$,

∴ $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (AAS),

∴ $AB = BC$, $AD = CD$,

∴ 四边形 ABCD 是筝形.

②解: ∵ 四边形 ABCD 是筝形, 且 $AO = CO$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle ADC = 60^\circ$,

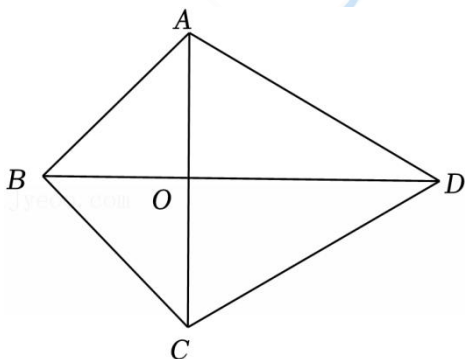
∴ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\triangle ADC$ 是等边三角形.

由①可知 $AC \perp BD$,

∴ $S_{\text{四边形} ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$,

设 $AO = x$, 则 $BO = CO = x$, $AD = AC = 2x$,

在 $\triangle AOD$ 中, 由勾股定理可得 $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{(2x)^2 - x^2} = \sqrt{3}x$,



∴ $BD = BO + OD = x + \sqrt{3}x = (\sqrt{3} + 1)x$,

∴ $S_{\text{四边形} ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 2x \cdot (\sqrt{3} + 1)x = (\sqrt{3} + 1)x^2$,



$$\because S_{\text{四边形}ABCD} = 4\sqrt{3} + 4,$$

$$\therefore (\sqrt{3} + 1)x^2 = 4\sqrt{3} + 4,$$

$$\therefore x^2 = 4,$$

$$\because x > 0,$$

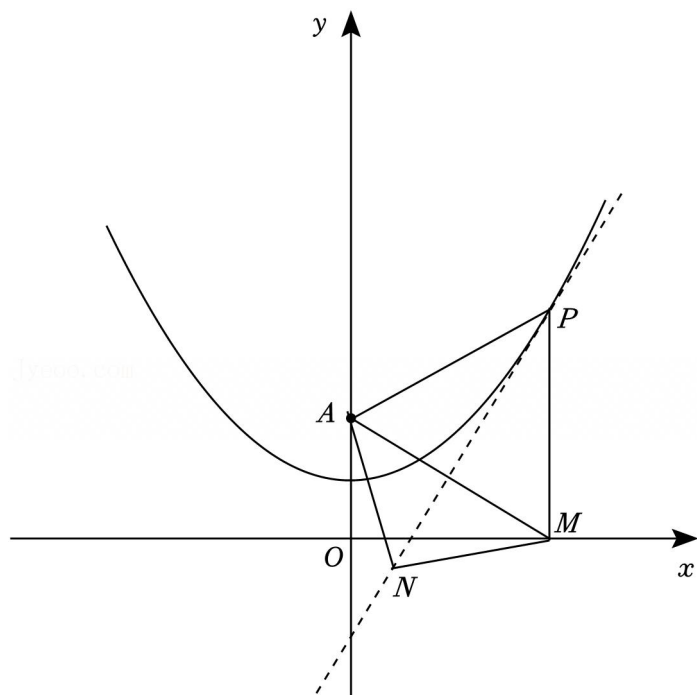
$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore AC = 2x = 4, \quad BD = (\sqrt{3} + 1)x = 2(\sqrt{3} + 1),$$

$$\therefore AB = BC = 2\sqrt{2}, \quad AD = CD = AC = 4,$$

$$\therefore C_{\text{四边形}ABCD} = AB + BC + CD + AD = 4\sqrt{2} + 8.$$

(3) 解：如图，四边形 APMN 是筝形， $AP = PM$ ， $AN = MN$ ，



$\because$ 点 $P(x, y)$ ， $PM \perp x$ 轴.

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(x, 0)$ ，

$$\because PA^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1, \quad PM^2 = (x - x)^2 + (y - 0)^2 = y^2,$$

$$\therefore y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1,$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2};$$

设 $P_1(t, y_1)$ ， $P_2(t+1, y_2)$ ， $P_3(t+a, y_3)$ ，



$$\text{则 } y_1 = \frac{1}{4}t^2 + 1, y_2 = \frac{1}{4}(t+1)^2 + 1, y_3 = \frac{1}{4}(t+a)^2 + 1,$$

$$\therefore y_2 - y_1 = \frac{1}{4}(t+1)^2 + 1 - (\frac{1}{4}t^2 + 1) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4},$$

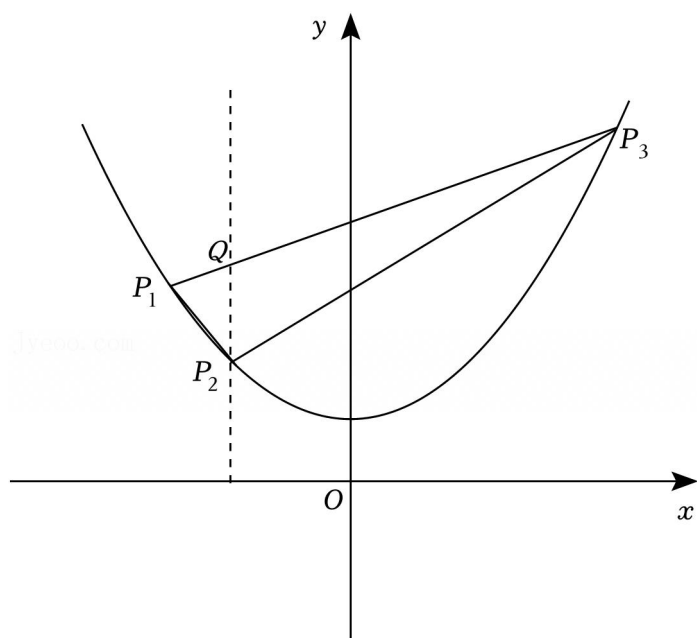
$$y_3 - y_1 = \frac{1}{4}(t+a)^2 + 1 - (\frac{1}{4}t^2 + 1) = \frac{1}{2}at + \frac{1}{4}a^2,$$

过点 P_2 作 x 轴的垂线交直线 P_1P_3 于点 Q . 设直线 P_1P_3 的解析式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$),

$$\text{则 } \begin{cases} tk + b = y_1 \\ (t+a)k + b = y_3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{y_3 - y_1}{a} \\ b = y_1 - \frac{t(y_3 - y_1)}{a} \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } P_1P_3 \text{ 的解析式为 } y = \frac{y_3 - y_1}{a}x + y_1 - \frac{t(y_3 - y_1)}{a},$$



$$\text{令 } x=t+1, \text{ 得 } y = \frac{y_3 - y_1}{a} + y_1,$$

$$\therefore Q(t+1, \frac{y_3 - y_1}{a} + y_1),$$

$$\therefore P_2Q = \frac{y_3 - y_1}{a} + y_1 - y_2 = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4},$$

$$\text{则 } S_{\triangle P_1P_2P_3} = \frac{1}{2}P_2Q \cdot (t+a-t) = \frac{1}{8}(a-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{32},$$

$$\therefore \frac{1}{8} > 0, \text{ 且 } \sqrt{2} \leq a \leq 4,$$

$$\therefore \text{当 } a=4 \text{ 时, } S_{\triangle P_1P_2P_3} \text{ 有最大值, 最大值为 } \frac{3}{2}.$$

【点评】 本题是二次函数综合题, 考查了待定系数法, 二次函数的图象和性质, 全等三角



形的判定和性质，勾股定理，三角形面积等，理解并应用新定义是解题关键.

李忠义教研究室
设计锻炼思考能力的好资料