



湘教版九上数学月考卷（二）

一. 选择题

1. 下列函数中, y 是 x 的反比例函数的是 ()

- A. $y = \frac{x}{3}$ B. $y = \frac{1}{x^2}$ C. $y = \frac{4}{x}$ D. $y = \frac{1}{3}x^2$

2. 下列方程中, 属于一元二次方程的是 ()

- A. $x - 2y = 1$ B. $x^2 - 2x + 1 = 0$ C. $x^2 - 2y + 4 = 0$ D. $x^2 + 3 = \frac{2}{x}$

3. 若点 $(3, -4)$ 在反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象上, 则该图象也过点 ()

- A. $(2, 6)$ B. $(3, 4)$ C. $(-4, -3)$ D. $(-6, 2)$

4. 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 $(-2, 1)$, 则下列说法错误的是 ()

- A. $k = -2$
B. 函数图象分布在第二、四象限
C. 当 $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而增大
D. 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小

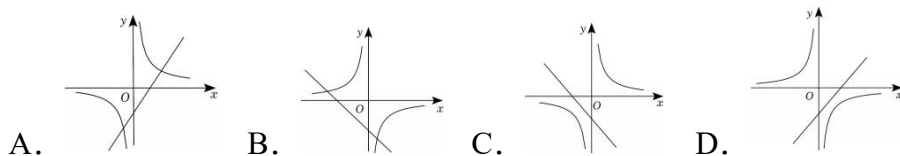
5. 方程 $x^2 + 1 = 3x$ 二次项系数, 一次项系数和常数项分别是 ()

- A. 1, -3, 1 B. -1, -3, 1 C. 1, 3, -1 D. 1, 3, 1

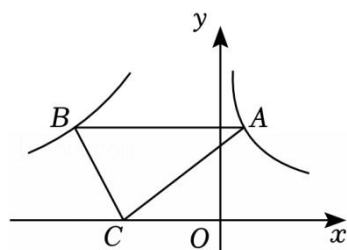
6. 方程 $x^2 - 2x - 3 = 0$ 经过配方法化为 $(x+a)^2 = b$ 的形式, 正确的是 ()

- A. $(x-1)^2 = 4$ B. $(x+1)^2 = 4$ C. $(x-1)^2 = 16$ D. $(x+1)^2 = 16$

7. 一次函数 $y = ax - a$ 与反比例函数 $y = \frac{a}{x} (a \neq 0)$ 在同一坐标系中的图象可能是 ()



8. 如图, 点 A 在双曲线 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 上, 点 B 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 上, $AB \parallel x$ 轴, 点 C 是 x 轴上一点, 连接 AC、BC, 若 $\triangle ABC$ 的面积是 6, 则 k 的值 ()



- A. - 6 B. - 8 C. - 10 D. - 12

9. 《九章算术》是中国传统数学重要的著作之一. 其中第九卷《勾股》记载了一道有趣的“折竹抵地”问题: “今有竹高一丈, 末折抵地, 去本四尺, 问折者高几何?” 其大意为: “一根竹子, 原高一丈, 一阵风将竹子折断, 其竹梢恰好抵地, 抵地处离竹子底部 4 尺远, 则折断后的竹子高度为多少尺?” (备注: 1 丈 = 10 尺) 如果设折断后的竹子高度为 x 尺, 根据题意, 可列方程为 ()

- A. $x^2 + 4^2 = (10 - x)^2$ B. $(10 - x)^2 + 4^2 = x^2$
C. $x^2 + (10 - x)^2 = 4^2$ D. $x(10 - x) = 4^2$

10. 等腰三角形边长分别为 a, b, 2, 且 a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + n + 2 = 0$ 的两个根, 则 n 的值为 ()

- A. 6 B. 6 或 7 C. 7 或 8 D. 7

二. 填空题

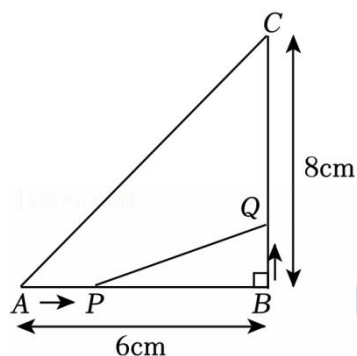
11. 方程 $x^2 - 3x = 0$ 的解是_____.
12. 已知点 $(2, y_1)$, $(1, y_2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上, 则 y_1 _____ y_2 (填 “>” 或 “<”).
13. 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两个实数根, 则 $x_1 + x_2 - 4x_1x_2$ 的值为_____.

14. 若反比例函数 $y = \frac{1+k}{x}$ 的图象位于第二、四象限，则 k 的取值范围是 _____ .

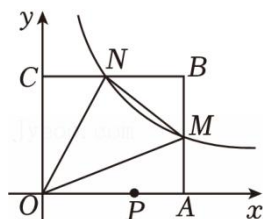
15. 学校进行乒乓球选拔赛，每个参赛选手都要和其他所有选手各赛一场，一共进行了 36 场比赛，有_____ 人参加了选拔赛.

16. 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个实数根，则 k 的取值范围是 _____ .

17. 如图所示， $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $AB = 6\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，点 P 从 A 点开始沿 AB 向 B 点以 1cm/s 的速度移动，点 Q 从 B 点开始沿 BC 边向 C 点以 2cm/s 的速度移动. 如果 P 、 Q 分别从 A 、 B 同时出发，那么 _____ 秒后，线段 PQ 将 $\triangle ABC$ 分成面积 $1:2$ 的两部分.



18. 如图，双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0, x > 0$) 与正方形 $OABC$ 的两边 AB 、 BC 分别相交于 M 、 N 两点，若 $A(6, 0)$ ， $\triangle OMN$ 的面积为 10. 动点 P 在 x 轴上，则 $PM + PN$ 的最小值是 _____ .



三. 解答题

19. 用适当的方法解下列方程:

(1) $(3x+1)^2 - 4 = 0$

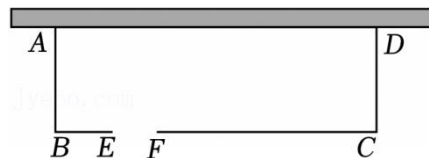
(2) $x^2 + 6x - 7 = 0$;

20. 已知平行四边形 ABCD 的两边 AB、AD 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 8x + m = 0$ 的两个实数根.

(1) 若 AB 的长为 5, 求 m 的值;

(2) m 为何值时, 平行四边形 ABCD 是菱形? 求出此时菱形的边长.

21. 如图，老李想用长为 70m 的栅栏，再借助房屋的外墙（外墙足够长）围成一个矩形羊圈 ABCD，并在边 BC 上留一个 2m 宽的门（建在 EF 处，另用其他材料）。当羊圈的长和宽分别为多少米时，能围成一个面积为 640m^2 的羊圈？



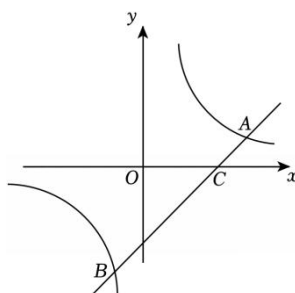
22. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，直线 AB: $y_1 = x - 3$ 与反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x}$ 的图象交于 A、B 两点，与 x 轴相交于点 C，已知点 B 的坐标为 $(m, -5)$.

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 直接写出不等式 $y_1 < y_2$ 的解集.

(3) 点 P 为反比例函数 $y_2 = \frac{k}{x}$ 图象上任意一点，若 $S_{\triangle POC} = 2S_{\triangle AOC}$,

求点 P 的坐标；



23. 2024 年巴黎奥运会顺利闭幕，吉祥物“弗里热”深受奥运迷的喜爱，一商场以 20 元的进价进一批“弗里热”纪念品，以 30 元每个的价格售出，每周可以卖出 500 个，经过市场调查发现，价格每涨 10 元，就少卖 100 个.

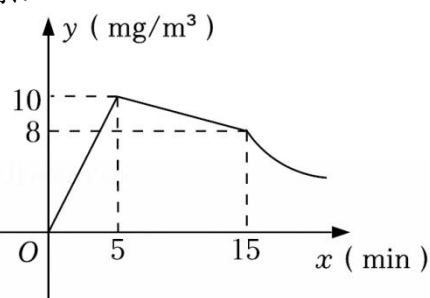
(1) 若商场计划一周的利润达到 8000 元，并且更大优惠让利消费者，售价应定为多少钱？

(2) 商场改变销售策略，在不改变 (1) 的销售价格基础上，销售量稳步提升，两周后销售量达到了 484 个，求这两周的平均增长率.

24. 为预防某种流感病毒，某校对教室采取喷洒药物的方式进行消毒. 在消毒过程中，先进行 5min 的药物喷洒，接着封闭教室 10min，然后打开门窗进行通风. 教室内空气中的含药量 y (mg/m^3) 与药物在空气中的持续时间 x (min) 之间的函数关系如图所示，在打开门窗通风前分别满足两个一次函数关系，在通风后满足反比例函数关系.

(1) 求药物喷洒后 ($x \geq 5$) 空气中含药量 y (mg/m^3) 与药物在空气中的持续时间 x (min) 的函数表达式;

(2) 如果室内空气中的含药量达到 $5\text{mg}/\text{m}^3$ 及以上且持续时间不低于 20min，才能有效消毒，通过计算说明此次消毒是否有效?



25. 配方法是数学中重要的一种思想方法. 它是指将一个式子的某一部分通过恒等变形化为完全平方式或几个完全平方式的和的方法. 常被用到代数式的变形中, 并结合非负数的意义来解决一些问题.

我们定义: 一个整数能表示成 a^2+b^2 (a 、 b 是整数) 的形式, 则称这个数为“完美数”. 例如, 5 是“完美数”. 理由: 因为 $5=2^2+1^2$, 所以 5 是“完美数”.

【解决问题】:

(1) 已知 29 是“完美数”, 请将它写成 a^2+b^2 (a 、 b 是整数) 的形式.

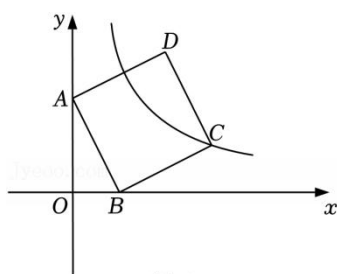
(2) 若 $x^2 - 6x + 13$ 可配方成 $(x - m)^2 + n^2$ (m 、 n 为常数), 则 $mn = \underline{\hspace{2cm}}$.

【探究问题】:

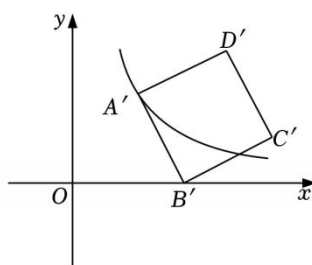
(3) 已知 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$, 求 $x+y$ 的值;

(4) 已知 $S = x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + k$ (x 、 y 是整数, k 是常数), 要使 S 为“完美数”, 试求出符合条件的一个 k 值, 并说明理由.

26. 如图 1, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 点 A 在 y 轴上, 点 B 在 x 轴上, 且 $OA=2OB$, 反比例函数 $y=\frac{27}{x}$ 在第一象限的图象经过正方形的顶点 C .



(图1)



(图2)

- (1) 求点 C 的坐标;
- (2) 如图 2, 将正方形 $ABCD$ 沿 x 轴向右平移得到正方形 $A'B'C'D'$, 点 A' 恰好落在反比例函数的图象上, 求此时点 D' 的坐标;
- (3) 在 (2) 的条件下, 点 P 为 y 轴上一动点, 平面内是否存在点 Q , 使以点 O 、 A' 、 P 、 Q 为顶点的四边形为菱形, 若存在, 请直接写出点 Q 的坐标, 若不存在, 请说明理由.

湘教版九上数学月考卷（二）

参考答案与试题解析

一. 选择题

1. 【分析】直接利用反比例函数的定义分别判断得出答案.

【解答】解：A、 $y=\frac{x}{3}$ ，是 y 与 x 成正比例，不符合题意；

B、 $y=\frac{1}{x^2}$ ，不是反比例函数，不符合题意；

C、 $y=\frac{4}{x}$ ，是反比例函数，符合题意；

D、 $y=\frac{1}{3}x^2$ ，是二次函数，不符合题意.

故选：C.

【点评】此题主要考查了反比例函数的定义，熟知形如 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数， $k \neq 0$) 的函数称为反比例函数是解题的关键.

2. 【分析】直接根据一元二次方程的定义进行判断即可.

【解答】解：选项 A，方程中含有两个未知数，不是一元二次方程，故该选项不符合题意；

选项 B，方程中只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 次的整式方程，是一元二次方程. 该选项符合题意.

选项 C，方程中含有两个未知数，不是一元二次方程，故该项不符合题意；

选项 D，方程不是整式方程，不是一元二次方程，故该选项不符合题意.

故选：B.

【点评】本题考查了一元二次方程的定义，只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 次的整式方程是一元二次方程.

3. 【分析】先利用待定系数法求出反比例函数解析式，进而得到在反比例函数图象上的点横纵坐标的乘积为 -12，由此即可得到答案.

【解答】解： $\because$ 点 $(3, -4)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象上，

$$\therefore -4 = \frac{k}{3},$$

$$\therefore k = -12,$$

∴反比例函数解析式为 $y = -\frac{12}{x}$,

∴在反比例函数图象上的点横纵坐标的乘积为 -12,

∴四个选项中只有 D 选项满足横纵坐标的乘积为 -12,

∴D 选项符合题意.

故选: D.

【点评】 本题主要考查了求反比例函数解析式, 反比例函数的性质, 正确得到在反比例函数图象上的点横纵坐标的乘积为 -12 是解题的关键.

4. **【分析】** 利用待定系数法求得 k 的值, 再利用反比例函数图象的性质对每个选项进行逐一判断即可.

【解答】 解: ∵反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 (-2, 1),

∴ $k = -2 \times 1 = -2$.

故 A 正确;

∵ $k = -2 < 0$,

∴双曲线 $y = -\frac{2}{x}$ 分布在第二、四象限,

故 B 选项正确;

∵当 $k = -2 < 0$ 时, 反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 在每一个象限内 y 随 x 的增大而增大,

即当 $x > 0$ 或 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而增大.

故 C 选项正确, D 选项错误,

综上, 说法错误的是 D,

故选: D.

【点评】 本题主要考查了反比例函数图象上点的坐标的特征, 待定系数法确定函数的解析式, 反比例函数图象的性质. 利用待定系数法求得 k 的值是解题的关键.

5. **【分析】** 对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$, 其中 a、b、c 是常数且 $a \neq 0$, a 叫做二次项系数, b 叫做一次项系数, c 叫做常数项, 据此可得答案.

【解答】 解: 把原方程化为一般式为 $x^2 - 3x + 1 = 0$,

∴原方程的二次项系数为 1, 一次项系数为 -3, 常数项为 1,

故选: A.

【点评】 本题主要考查了一元二次方程的一般式, 熟练掌握一元二次方程的一般式是解题

的关键.

6. 【分析】根据配方法即可求出答案.

【解答】解：原方程化为： $x^2 - 2x + 1 - 1 - 3 = 0$,

所以 $(x - 1)^2 = 4$,

故选：A.

【点评】本题考查一元二次方程的配方法，解题的关键是熟练运用配方法，本题属于基础题型.

7. 【分析】分别根据 $a > 0$ 和 $a < 0$ 讨论直线和双曲线在坐标系中的位置即可得.

【解答】解：当 $a > 0$ 时，直线经过第一、三、四象限，双曲线经过第一、三象限，故 A 符合题意；

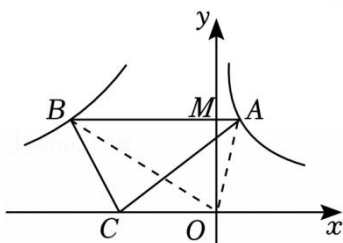
当 $a < 0$ 时，直线经过第一、二、四象限，双曲线经过第二、四象限，没有符合题意的.

故选：A.

【点评】本题主要考查反比例函数和一次函数的图象与性质，熟练掌握根据待定系数判断图象在坐标系中的位置是解题的关键.

8. 【分析】根据 $AB \parallel x$ 轴可以得到 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} = 6$ ，转换成反比例函数的问题即可解答.

【解答】解：如图，连接 OA，OB，AB 与 y 轴交于点 M，



$\because AB \parallel x$ 轴，点 A 在曲线 $y = \frac{2}{x} (x > 0)$ 上，点 B 在曲线 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 上，

$\therefore S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2} \times |2| = 1$ ， $S_{\triangle BOM} = \frac{1}{2} \times |k| = -\frac{1}{2}k$ ，

$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AOB} = 6$ ，

$\therefore 1 - \frac{1}{2}k = 6$ ，

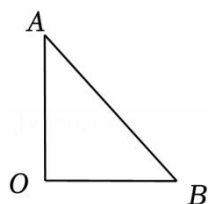
$\therefore k = -10$.

故选：C.

【点评】此题考查了利用待定系数法确定反比例函数解析式，坐标与图形性质，熟记反比例函数面积与 k 的关系是解本题的关键.

9. 【分析】根据勾股定理列方程即可.

【解答】解：如图所示：



由题意得： $\angle AOB = 90^\circ$ ，

设折断处离地面的高度 OA 是 x 尺，

由勾股定理得： $x^2 + 4^2 = (10 - x)^2$.

故选：A.

【点评】本题主要考查了从实际问题抽象出一元二次方程，勾股定理的应用，根据题意正确应用勾股定理是解题关键.

10. 【分析】由三角形是等腰三角形，得到① $a=2$ ，或 $b=2$ ；② $a=b$ ；①当 $a=2$ ，或 $b=2$ 时，得到方程的根 $x=2$ ，把 $x=2$ 代入 $x^2 - 6x + n + 2 = 0$ 即可得到结果；②当 $a=b$ 时，方程 $x^2 - 6x + n + 2 = 0$ 有两个相等的实数根，由 $\Delta = (-6)^2 - 4(n+2) = 0$ 可得结果.

【解答】解： $\because$ 三角形是等腰三角形，

$\therefore$ ① $a=2$ ，或 $b=2$ ；② $a=b$ 两种情况，

①当 $a=2$ ，或 $b=2$ 时，

$\because a, b$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + n + 2 = 0$ 的两个根，

$\therefore x=2$ ，

把 $x=2$ 代入 $x^2 - 6x + n + 2 = 0$ 得， $2^2 - 6 \times 2 + n + 2 = 0$ ，

解得： $n=6$ ，

当 $n=6$ ，方程的两根是2和4，而2，4，2不能组成三角形，

故 $n=6$ 不合题意，

②当 $a=b$ 时，方程 $x^2 - 6x + n + 2 = 0$ 有两个相等的实数根，

$\therefore \Delta = (-6)^2 - 4(n+2) = 0$

解得： $n=7$.

故选：D.

【点评】本题考查了等腰三角形的性质，一元二次方程的解，根的判别式，注意分类讨论思想的应用.

二. 填空题

11. 【分析】 $x^2 - 3x$ 有公因式 x 可以提取，故用因式分解法解较简便.

【解答】解：原式为 $x^2 - 3x = 0$ ， $x(x - 3) = 0$ ， $x = 0$ 或 $x - 3 = 0$ ， $x_1 = 0$ ， $x_2 = 3$.

$\therefore$ 方程 $x^2 - 3x = 0$ 的解是 $x_1 = 0$ ， $x_2 = 3$.

【点评】本题考查简单的一元二次方程的解法，在解一元二次方程时应当注意要根据实际情况选择最合适快捷的解法.

12. 【分析】根据反比例函数的增减性解答即可.

【解答】解： $\because k = 1 > 0$,

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象在一、三象限，

$\because 2 > 1 > 0$,

$\therefore (2, y_1), (1, y_2)$ 在第一象限， y 随 x 的增大而减小，

$\therefore y_1 < y_2$.

故答案为： $<$.

【点评】本题主要考查反比例函数图象上点的坐标特征. 注意：反比例函数的增减性只指在同一象限内.

13. 【分析】根据一元二次方程根与系数的关系，得到 $x_1 + x_2 = -1$ ， $x_1 x_2 = -2$ ，再代入 $x_1 + x_2 - 4x_1 x_2$ 即得答案.

【解答】解： $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两个实数根，

$\therefore x_1 + x_2 = -1$ ， $x_1 x_2 = -2$ ，

$\therefore x_1 + x_2 - 4x_1 x_2$

$= -1 - 4 \times (-2)$

$= -1 + 8$

$= 7$.

故答案为：7.

【点评】本题考查了一元二次方程根与系数的关系，正确理解一元二次方程根与系数的关系是解题的关键.

14. 【分析】根据反比例函数的性质列不等式即可解得答案.

【解答】解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{1+k}{x}$ 的图象位于第二、四象限，

$$\therefore 1+k < 0,$$

解得 $k < -1$,

故答案为: $k < -1$.

【点评】 本题考查反比例函数的性质, 解题的关键是掌握当 $k < 0$ 时, $y = \frac{k}{x}$ 的图象位于第二、四象限.

15. **【分析】** 设有 x 人参加了选拔赛, 根据一共进行了 36 场比赛, 列出方程进行求解即可.

【解答】 解: 设有 x 人参加了选拔赛, 根据一共进行了 36 场比赛, 列方程得:

$$\frac{x(x-1)}{2} = 36,$$

解得: $x_1 = 9$, $x_2 = -8$ (舍去),

所以有 9 人参加了选拔赛.

答: 有 9 人参加了选拔赛.

故答案为: 9.

【点评】 本题考查一元二次方程的实际应用, 关键是根据题意找到等量关系式.

16. **【分析】** 根据方程根的情况可以判定其根的判别式的取值范围, 进而可以得到关于 k 的不等式, 解得即可, 同时还应注意二次项系数不能为 0.

【解答】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(k-1)x^2 - 2x + 1 = 0$ 有两个实数根,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(k-1) \geq 0 \text{ 且 } k-1 \neq 0,$$

解得: $k \leq 2$ 且 $k \neq 1$.

故答案为: $k \leq 2$ 且 $k \neq 1$.

【点评】 此题考查一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系: (1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根; (2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; (3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根. 以及方程的意义.

17. **【分析】** 根据题意表示出 BP、BQ 的长, 再分两种情况, 分别根据三角形的面积公式列方程即可.

【解答】 解: 根据题意, 知 $BP = AB - AP = (6-t)$ cm, $BQ = 2t$ cm.

$\because$ 线段 PQ 将 $\triangle ABC$ 分成面积 1: 2 的两部分,

$$\therefore S_{\triangle PBQ} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \text{ 或 } S_{\triangle PBQ} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABC},$$

则根据三角形的面积公式, 得 $\frac{1}{2} (6-t) \cdot 2t = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8$, 或 $\frac{1}{2} (6-t) \cdot 2t = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 8$,

整理得： $t^2 - 6t + 8 = 0$ 或 $t^2 - 6t + 16 = 0$ （无实数解），

解得 $t_1 = 2$ ， $t_2 = 4$ ，

即线段 PQ 将 $\triangle ABC$ 分成面积 1: 2 的两部分，运动时间为 2 或 4 秒.

故答案为：2 或 4.

【点评】考查了一元二次方程的应用，关键是根据题意找到等量关系式.

18. 【分析】由正方形 OABC 的边长是 6，得到点 M 的横坐标和点 N 的纵坐标为 6，求得 $M(6, \frac{k}{6})$ ， $N(\frac{k}{6}, 6)$ ，根据三角形的面积列方程得到 $M(6, 4)$ ， $N(4, 6)$ ，作 M 关于 x 轴的对称点 M' ，连接 NM' 交 x 轴于 P，则 NM' 的长 = $PM + PN$ 的最小值，根据勾股定理即可得到结论.

【解答】解：∵ 正方形 OABC 的边长是 6，

∴ 点 M 的横坐标和点 N 的纵坐标为 6，

∴ $M(6, \frac{k}{6})$ ， $N(\frac{k}{6}, 6)$ ，

∴ $BN = 6 - \frac{k}{6}$ ， $BM = 6 - \frac{k}{6}$ ，

∵ $\triangle OMN$ 的面积为 10，

∴ $6 \times 6 - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{k}{6} - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{k}{6} - \frac{1}{2} \times (6 - \frac{k}{6})^2 = 10$ ，

∴ $k = 24$ ，

∴ $M(6, 4)$ ， $N(4, 6)$ ，

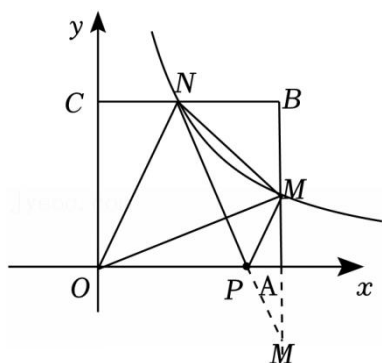
作 M 关于 x 轴的对称点 M' ，连接 NM' 交 x 轴于 P，则 NM' 的长 = $PM + PN$ 的最小值，

∵ $AM = AM' = 4$ ，

∴ $BM' = 10$ ， $BN = 2$ ，

∴ $NM' = \sqrt{BM'^2 + BN^2} = \sqrt{10^2 + 2^2} = 2\sqrt{26}$ ，

故答案为 $2\sqrt{26}$.



【点评】 本题考查了反比例函数的系数 k 的几何意义，轴对称 - 最短路线问题，勾股定理，正方形的性质，正确作出辅助线是解题的关键.

三. 解答题

19. 【分析】 (1) 用直接开平方法，解一元二次方程即可；

(2) 用因式分解法，解一元二次方程即可.

【解答】 解：(1) 移项得： $(3x+1)^2=4$,

方程两边开方得 $3x+1=2$ 或 $3x+1=-2$,

解得 $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-1$;

(2) 方程左边因式分解得： $(x-1)(x+7)=0$,

所以 $x-1=0$ 或 $x+7=0$,

解得 $x_1=1$, $x_2=-7$.

【点评】 本题主要考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的方法是解题的关键.

20. 【分析】 (1) 将 $x=5$ 代入原方程可求出 m 的值；

(2) 根据菱形的性质可得出 $AB=AD$ ，结合根的判别式，即可得出关于 m 的一元二次方程，解之即可得出 m 的值，将其代入原方程，解之即可得出菱形的边长.

【解答】 解：(1) $\because AB$ 、 AD 的长是关于 x 的一元二次方程 $x^2-8x+m=0$ 的两个实数根，
 AB 的长为 5，

$\therefore$ 把 $x=5$ 代入 $x^2-8x+m=0$ ，得：

$$5^2-8 \times 5+m=0,$$

解得： $m=15$;

(2) $\because$ 平行四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB=AD,$$

$\therefore$ 方程 $x^2 - 8x + m = 0$ 有两个相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (-8)^2 - 4m = 0,$$

$$\therefore m = 16,$$

此时方程为 $x^2 - 8x + 16 = 0$,

$$\therefore x_1 = x_2 = 4,$$

$\therefore AB=AD=4$, 即菱形的边长为 4;

答: $m=16$, 平行四边形 ABCD 是菱形, 菱形的边长是 4.

【点评】 本题考查了根与系数的关系, 平行四边形的性质, 菱形的判定与性质, 熟练掌握根的判别式和菱形的判定与性质是解题的关键.

21. **【分析】** 根据 $BC = \text{栅栏总长} - 2AB + EF$, 再利用矩形面积公式即可求出.

【解答】 解: 设矩形 ABCD 的边 $AB = xm$, 则边 $BC = 70 - 2x + 2 = (72 - 2x) m$;

根据题意, 得 $x(72 - 2x) = 640$,

化简, 得 $x^2 - 36x + 320 = 0$,

解得: $x_1 = 16$, $x_2 = 20$,

当 $x = 16$ 时, $72 - 2x = 72 - 32 = 40$;

当 $x = 20$ 时, $72 - 2x = 72 - 40 = 32$.

故当羊圈的长为 40m, 宽为 16m 或长为 32m, 宽为 20m 时, 能围成一个面积为 $640m^2$ 的羊圈.

【点评】 本题考查了一元二次方程的应用, 解题的关键是要理解题意, 能正确列出方程.

22. **【分析】** (1) 先求出点 B 的坐标, 再用待定系数法, 即可得出反比例函数解析式;

(2) 联立反比例函数解析式和一次函数解析式, 求出点 A 的坐标, 根据图象, 写出当一次函数图象低于反比例函数图象时, 自变量的取值范围即可;

(3) 先求出 $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot y_A = 3$, 则 $S_{\triangle POC} = \frac{1}{2} OC \cdot |y_P| = \frac{1}{2} \times 3 \times |y_P| = 6$, 得出点 P 的纵坐标, 即可解答.

【解答】 解: (1) 把 $B(m, -5)$ 代入 $y_1 = x - 3$ 得: $-5 = m - 3$,

解得: $m = -2$,

$\therefore B(-2, -5)$,

把 B (-2, -5) 代入 $y_2 = \frac{k}{x}$ 得: $-5 = \frac{k}{-2}$,

解得: $k=10$,

∴ 反比例函数解析式为 $y_2 = \frac{10}{x}$;

(2) 联立反比例函数解析式和一次函数解析式得: $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = \frac{10}{x} \end{cases}$,

解得: $\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = -2 \\ y_2 = -5 \end{cases}$,

∴ A (5, 2),

由图可知, 当 $x < -2$ 或 $0 < x < 5$ 时, $y_1 < y_2$;

(3) 解: 把 $y=0$ 代入 $y_1 = x - 3$,

解得: $x=3$,

∴ C (3, 0),

∴ OC=3,

∴ $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} OC \cdot y_A = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 3$,

∴ $S_{\triangle POC} = 2S_{\triangle AOC} = 6$,

∴ $S_{\triangle POC} = \frac{1}{2} OC \cdot |y_P| = \frac{1}{2} \times 3 \times |y_P| = 6$,

∴ $|y_P|=4$, 则 $y_P=4$ 或 $y_P=-4$,

当 $y_P=4$ 时, $P(\frac{5}{2}, 4)$,

当 $y_P=-4$ 时, $P(-\frac{5}{2}, -4)$,

综上: $P(\frac{5}{2}, 4)$ 或 $P(-\frac{5}{2}, -4)$.

【点评】 本题考查了反比例函数和一次函数综合, 解题的关键是熟练掌握用待定系数法求解函数解析式的方法和步骤, 以及一次函数和反比例函数的图象和性质.

23. **【分析】** (1) 设售价应定为 x 元, 由商场计划一周的利润达到 8000 元, 列出方程可求解;

(2) 设这两周的平均增长率为 y , 由在不改变 (1) 的销售价格基础上, 销售量稳步提升, 两周后销售量达到了 484 个, 列出方程, 即可求解.

【解答】 解: (1) 设售价应定为 x 元,

由题意可得: $8000 = (x - 20) [500 - \frac{100}{10} (x - 30)]$,

$$x^2 - 100x + 2400 = 0,$$

解得： $x_1 = 40$ ， $x_2 = 60$ ，

∴更大优惠让利消费者，

∴ $x = 40$ ，

答：售价应定为 40 元；

(2) 设这两周的平均增长率为 y ，

$$\text{由题意：} [500 - \frac{100}{10} (40 - 30)] (1+y)^2 = 484,$$

解得： $y_1 = 0.1 = 10\%$ ， $y_2 = -2.1$ (不合题意舍去)，

答：这两周的平均增长率为 10%.

【点评】 本题考查了一元二次方程的应用，找到正确的数量关系是解题的关键.

24. **【分析】** (1) 分 $5 \leq x < 15$ 和 $x \geq 15$ 两种情况讨论，当 $5 \leq x < 15$ 时， y 与 x 成一次函数，利用待定系数法，即可得出一次函数解析式；当 $x \geq 15$ 时， y 与 x 为反比例函数关系式，利用待定系数法即可得出反比例函数解析式；

(2) 先求出正比例函数解析式，再计算正比例函数和反比例函数的函数值为 5 对应的自变量的值，则它们的差为含药量不低于 $5\text{mg}/\text{m}^3$ 的持续时间，然后与 20min 比较大小即可判断此次消毒是否有效.

【解答】 解：(1) 当 $5 \leq x < 15$ 时，

设 $y = kx + b$ ，

∴其图象过点 $(5, 10)$ ， $(15, 8)$ ，

$$\therefore \begin{cases} 5k + b = 10 \\ 15k + b = 8 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -0.2 \\ b = 11 \end{cases},$$

$$\therefore y = -0.2x + 11,$$

当 $x \geq 15$ 时，

$$\text{设 } y = \frac{k}{x},$$

∴图象过点 $(15, 8)$ ，

$$\therefore k = 8 \times 15 = 120,$$

$$\therefore y = \frac{120}{x},$$

综上，函数表达式为： $y = \begin{cases} -0.2x + 11 (5 \leq x < 15) \\ \frac{120}{x} (x \geq 15) \end{cases}$ ；

(2) 此次消毒有效.

理由：当 $0 \leq x < 5$ 时，

设 $y = kx$ ，将 $(5, 10)$ 代入，

则 $10 = 5k$ ，解得： $k = 2$ ，

$\therefore y = 2x$ ；

当 $y = 5$ 时， $5 = 2x$ ，解得 $x = \frac{5}{2}$ ，

当 $y = 5$ 时， $5 = \frac{120}{x}$ ，解得 $x = 24$ ，

$\therefore 24 - \frac{5}{2} = 21.5 > 20$ ，

$\therefore$ 此次消毒有效.

【点评】 本题考查一次函数的应用，反比例函数的应用，理解题意，能把实际的问题转化为数学问题，建立一次函数和反比例函数的数学模型，并进行分类讨论是解题关键.

25. **【分析】** (1) 由 29 是“完美数，可得 $29 = 5^2 + 2^2$ ；

(2) 由题意知， $x^2 - 6x + 13 = (x^2 - 6x + 9) + 4 = (x - 3)^2 + 2^2$ ，由 $x^2 - 6x + 13 = (x - m)^2 + n^2$ ，可得 $m = 3$ ， $n = \pm 2$ ，然后求解作答即可；

(3) 由 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ ，配方得 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$ ，即 $x - 1 = 0$ ， $y + 2 = 0$ ，进而可求 $x = 1$ ， $y = -2$ ，然后计算求解即可；

(4) 由题意知，当 $k = 13$ 时， $S = x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 13 = (x + 2)^2 + (2y - 3)^2$ ， S 是一个“完美数”.

【解答】 解：(1) $\because 29$ 是“完美数，

$\therefore 29 = 5^2 + 2^2$ ；

(2) $x^2 - 6x + 13$ 配方得： $x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 2^2$ ，

$\therefore (x - 3)^2 + 2^2 = (x - m)^2 + n^2$ ，

$\therefore m = 3$ ， $n = \pm 2$ ，

$\therefore mn = \pm 6$ ；

故答案为： ± 6 ；

(3) $\because x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ ，

$$\therefore (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 0, \text{ 即 } (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0,$$

$$\therefore x - 1 = 0, y + 2 = 0,$$

$$\text{解得 } x = 1, y = -2,$$

$$\therefore x + y = 1 - 2 = -1,$$

$$\therefore x + y = -1;$$

(4) 当 $k = 13$ 时, S 是完美数, 理由如下:

$$\text{当 } k = 13 \text{ 时, } S = x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 13 = x^2 + 4x + 4 + 4y^2 - 12y + 9 = (x + 2)^2 + (2y - 3)^2,$$

$\therefore x, y$ 是整数,

$\therefore x + 2, 2y - 3$ 也是整数,

$\therefore S$ 是一个“完美数”.

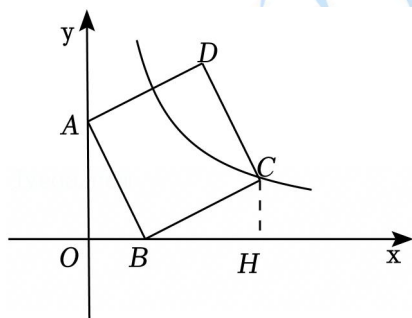
【点评】 本题考查了配方法. 熟练掌握完全平方公式进行配方是解题的关键.

26. **【分析】** (1) 作 $CH \perp x$ 轴于 H , 利用 AAS 证明 $\triangle AOB \cong \triangle BHC$, 得 $BH = OA = 6$, $CH = OB = 3$, 可得点 C 的坐标, 再将点 C 代入反比例函数解析式可得答案;

(2) 由 (1) 同理可得, 点 $D(6, 9)$, 根据 A' 的坐标求出 m 的值, 再利用平移的性质可得 D' 的坐标;

(3) 分 $OA' = OP$, $A'O = A'P$, $PA' = PO$ 三种情形, 分别画出菱形, 根据菱形的性质可得答案.

【解答】 解: (1) 作 $CH \perp x$ 轴于 H ,



$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore AB = BC, \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO + \angle CBH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABO + \angle OAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle CBH,$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle BHC \text{ (AAS)},$$

逐字研读题干 遇到困难回头看条件

▶▶▶

$$\therefore BH=OA, CH=OB,$$

$$\therefore OA=2OB,$$

$$\therefore OH=3OB,$$

$\therefore$ 点 C 在反比例函数的图象上,

$$\therefore 3OB^2=27,$$

$$\therefore OB=3 \text{ (负值已舍去)},$$

$$\therefore C(9, 3);$$

(2) 由 (1) 同理可得, 点 D(6, 9),

$\therefore$ 点 A' 恰好落在反比例函数的图象上,

$$\therefore \text{当 } y=6 \text{ 时, } x=\frac{9}{2},$$

$\therefore$ 反比例函数向右平移 $\frac{9}{2}$ 个单位长度,

$$\therefore D'(6+\frac{9}{2}, 9), \text{ 即 } D'(\frac{21}{2}, 9);$$

(3) 当 $OA'=OP$ 时, 如图,

$$\therefore A'(\frac{9}{2}, 6),$$

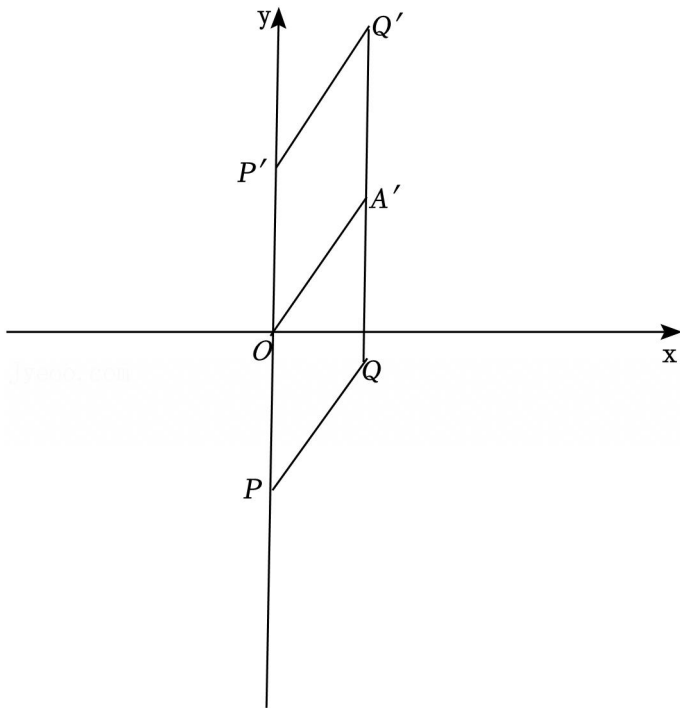
$$\therefore OA'=\frac{15}{2},$$

$\therefore$ 四边形 $OPQA'$ 是菱形,

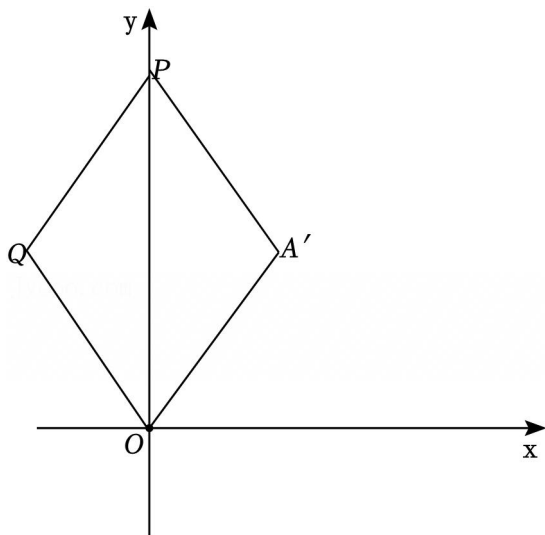
$$\therefore A'Q \parallel OP, A'Q=OP,$$

$$\therefore Q'(\frac{9}{2}, \frac{27}{2}),$$

当点 Q 在第四象限时, $Q(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}),$



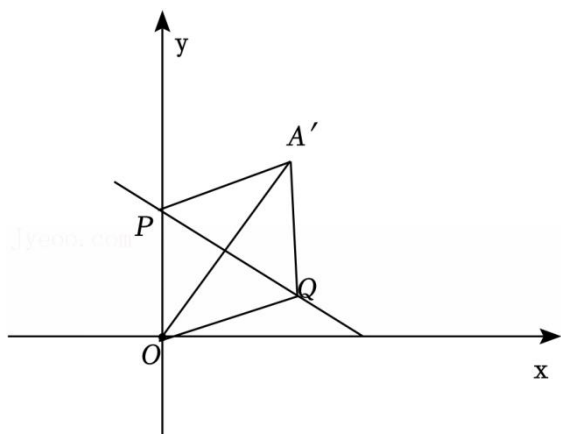
当 $A'O = A'P$ 时，如图，



则点 A' 与 Q 关于 y 轴对称，

$$\therefore Q\left(-\frac{9}{2}, 6\right),$$

当 $PO = PA'$ 时，如图，设 $P(0, m)$ ，



则 $PO=PA'$,

$$\therefore m^2 = (6-m)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2,$$

$$\text{解得 } m = \frac{225}{48},$$

$$\therefore OP = A'Q = \frac{225}{48},$$

$$\therefore Q\left(\frac{9}{2}, \frac{21}{16}\right),$$

综上: $Q\left(\frac{9}{2}, \frac{27}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(-\frac{9}{2}, 6\right)$ 或 $\left(\frac{9}{2}, \frac{21}{16}\right)$.

【点评】 本题是反比例函数综合题, 主要考查了正方形的性质, 平移的性质, 全等三角形的判定与性质, 菱形的性质, 等腰三角形的性质等知识, 根据 $\triangle OA'P$ 是等腰三角形进行分类讨论是解题的关键.