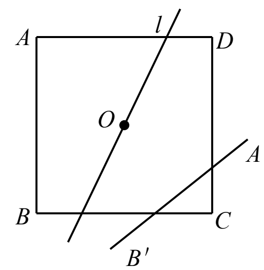
月考备考冲刺营

模块一 最值问题

例题 1

如图，正方形 $ABCD$ 边长为 2，动直线 l 经过正方形中心 O，线段 $A'B'$ 与线段 AB 关于直线 l 对称，则点 B 到直线 $A'B'$ 的距离最大值为________.

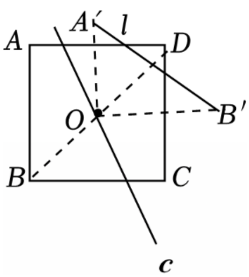


【答案】$\sqrt{2}+1$.

【解答】解：$OB=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$，

则 $OB'=OB=\sqrt{2}$，

过点 O 作 OQ 垂直于 $A'B'$ 于点 Q，



$\because\triangle AOB$ 为等腰直角三角形，

$\therefore\triangle A'OB'$ 为等腰直角三角形，

$OQ=2S_{\triangle A'OB'}\div A'B'$，

$S_{\triangle A'OB'}=\frac{1}{2}\times OB'\times OA'=1$，

$\therefore OQ=1$，

$\because OB+OQ\geqslant BQ$

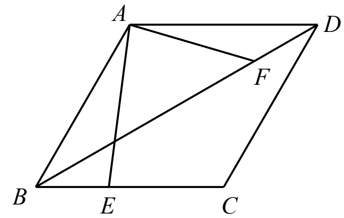
$\therefore$ 当 B 、 O 、 Q 三点共线时距离最大，

线段 $A'B'$ 与线段 AB 关于直线 l 对称，则最大距离 $d=OB+OQ=\sqrt{2}+1$.

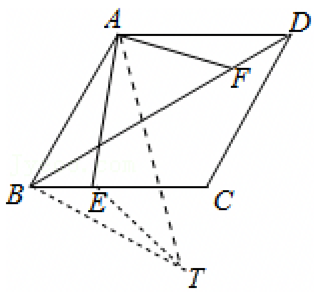
故答案为：$\sqrt{2}+1$.

例题 2

如图，菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60^\circ$，$AB=2$，E、F 分别是边 BC 和对角线 BD 上的动点，且 $BE=DF$，则 $AE+AF$ 的最小值为________.



【解答】解：如图，BC 的下方作 $\angle CBT=30^\circ$，在 BT 上截取 BT，使得 $BT=AD$，连接 ET，AT．



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，

$\therefore \angle ADC=\angle ABC=60^\circ$，$\angle ADF=\dfrac{1}{2}\angle ADC=30^\circ$，

$\because AD=BT$，$\angle ADF=\angle TBE=30^\circ$，$DF=BE$，

$\therefore \Delta ADF\cong\Delta TBE(SAS)$，

$\therefore AF=ET$，

$\because \angle ABT=\angle ABC+\angle CBT=60^\circ+30^\circ=90^\circ$，$AB=AD=BT=2$，

$\therefore AT=\sqrt{AB^2+BT^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，

$\therefore AE+AF=AE+ET$，

$\because AE+ET\geqslant AT$，

$\therefore AE+AF\geqslant 2\sqrt{2}$，

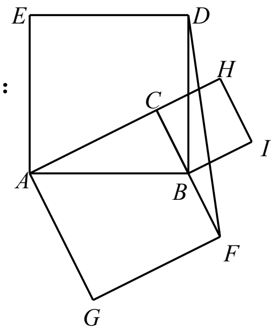
$\therefore AE+AF$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$，

故答案为 $2\sqrt{2}$．

模块二 正方形综合

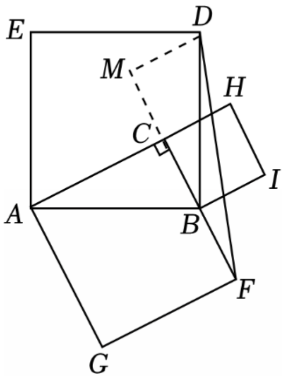
例题 3

（2025 秋•宁波期末）如图，分别以 $Rt\triangle ABC$ 的三边为边长，向外作正方形 $ABDE$，$BCHI$ 和 $ACFG$，连结 DF，其中 $BC=5$，$AC=10$，则 $DF=$__________．



【答案】$5\sqrt{10}$．

【解答】解：过点 D 作 $DM\perp FC$，交 FC 的延长线于点 M，如图所示：



$\therefore\angle M=90^{\circ}$，

$\therefore\triangle FMD$ 是直角三角形，

$\because$ 四边形 $ABDE$ 是正方形，

$\therefore AB=BD$，$\angle ABD=90^{\circ}$，

$\therefore\angle DBM+\angle ABC=90^{\circ}$，

在$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^{\circ}$，

$\therefore\angle ACB=\angle M=90^{\circ}$，$\angle BAC+\angle ABC=90^{\circ}$，

$\therefore\angle BAC=\angle DBM$，

在$\triangle ABC$ 和$\triangle BDM$ 中，

$$\begin{cases}\angle ACB=\angle M=90^{\circ}\\ \angle BAC=\angle DBM\\ AB=BD\end{cases},$$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle BDM(AAS)$，

$\therefore AC=BM$，$BC=DM$，

$\because BC=5$，$AC=10$，

$\therefore DM=5$，$BM=10$，

$\therefore CM=BM-BC=10-5=5$，

$\because$ 四边形 $ACFG$ 是正方形，

$\therefore CF=AC=10$，

$\therefore FM=CF+CM=10+5=15$，

在 $Rt\triangle FMD$ 中，$DM=5$，$FM=15$，

由勾股定理得：$DF=\sqrt{DM^2+FM^2}=\sqrt{5^2+15^2}=5\sqrt{10}$．

故答案为：$5\sqrt{10}$．

例题 4

如图，正方形 $ABCD$，点 E、H 分别在 AB、BC 上．

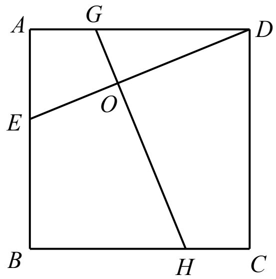


图 1

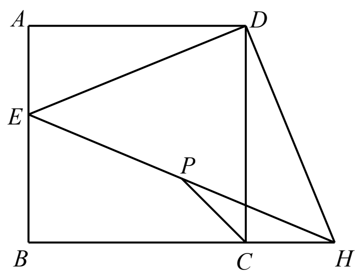


图 2

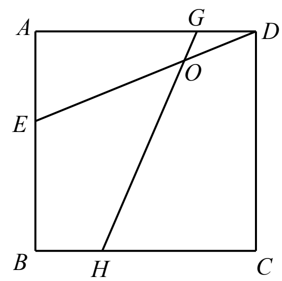


图 3

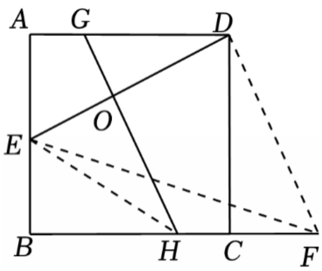
（1）如图 1，当 $\angle GOD=90^\circ$ 时，

①求证：$DE=GH$．

②平移图 1 中线段 GH，使 G 点与 D 重合，H 点在 BC 延长线上，连结 EH，取 EH 中点 P，连结 PC，如图 2，求证：$BE=\sqrt{2}PC$．

（2）如图 3，若点 G 在 AD 上，GH 和 DE 相交于点 O．当 $\angle EOH=45^\circ$，边长 $AB=3$，$HG=\sqrt{10}$，求 DE 的长．

【答案】（1）证明：①过点 D 作 $DF//GH$，交 BC 的延长线于点 F，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore \angle ADC=90^\circ$，$AD//BC$，

$\because DF//GH$，

$\therefore$ 四边形 $DGHF$ 是平行四边形，

$\therefore GD=FH$，$HG=DF$，

$\therefore \angle GOD=\angle FDE=90^\circ$，

$\therefore \angle FDC+\angle EDC=90^\circ$，

$\because \angle EDC+\angle ADE=90^\circ$，

$\therefore \angle FDC = \angle ADE$，

在$\triangle ADE$和$\triangle CDF$中，

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle FDC \\ AD = CD \\ \angle A = \angle DCF \end{cases},$$

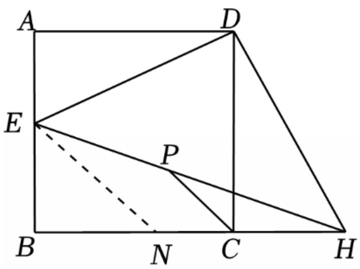
$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF(ASA)$，

$\therefore DE = DF$，

$\because HG = DF$，

$\therefore DE = GH$；

②在BC上截取$BN = BE$，如图2，



则$\triangle BEN$是等腰直角三角形，$BN = BE$，

由（1）知，$\triangle ADE \cong \triangle CDH$，

$\therefore AE = CH$，

$\because BA = BC$，$BE = BN$，

$\therefore CN = AE = CH$，

$\because PE = PH$，

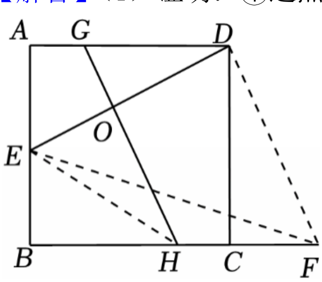
$\therefore PC = \dfrac{1}{2}EN$，

$\therefore PC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}BE$，

即$BE = \sqrt{2}PC$；

（2）$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$．

【解答】（1）证明：①过点D作$DF//GH$，交BC的延长线于点F，



$\because$四边形$ABCD$是正方形，

$\therefore \angle ADC=90^{\circ}$， $AD//BC$，

$\because DF//GH$，

$\therefore$四边形 $DGHF$ 是平行四边形，

$\therefore GD=FH$， $HG=DF$，

$\therefore \angle GOD=\angle FDE=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FDC+\angle EDC=90^{\circ}$，

$\because \angle EDC+\angle ADE=90^{\circ}$，

$\therefore \angle FDC=\angle ADE$，

在$\triangle ADE$ 和$\triangle CDF$ 中，

$$\begin{cases}\angle ADE=\angle FDC\\ AD=CD\\ \angle A=\angle DCF\end{cases}，$$

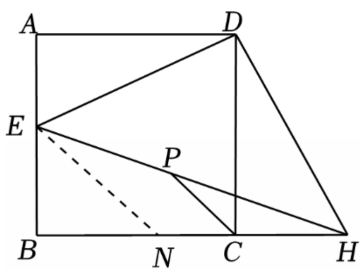
$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDF(ASA)$，

$\therefore DE=DF$，

$\because HG=DF$，

$\therefore DE=GH$；

②在 BC 上截取 $BN=BE$， 如图 2，



则$\triangle BEN$ 是等腰直角三角形， $BN=BE$，

由（1）知，$\triangle ADE\cong\triangle CDH$，

$\therefore AE=CH$，

$\because BA=BC$， $BE=BN$，

$\therefore CN=AE=CH$，

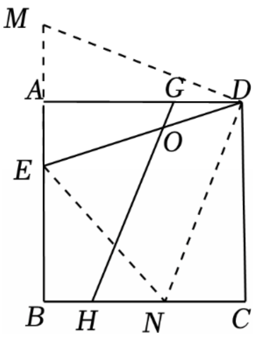
$\because PE=PH$，

$\therefore PC=\dfrac{1}{2}EN$，

$\therefore PC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BE$，

即 $BE=\sqrt{2}PC$；

（2）解：如图 3，过点 D 作 $DN//GH$ 交 BC 于点 N，



则四边形 $GHND$ 是平行四边形，

$\therefore DN = HG$， $GD = HN$，

$\because \angle C = 90°$， $HG = DN = \sqrt{10}$， $DC = AB = 3$，

$\therefore CN = \sqrt{DN^2 - DC^2} = \sqrt{10-9} = 1$，

$\therefore BN = BC - CN = 3 - 1 = 2$，

作 $\angle ADM = \angle CDN$， DM 交 BA 延长线于 M，

在$\triangle ADM$ 和$\triangle CDN$ 中，

$$\begin{cases} \angle ADM = \angle CDN \\ AD = CD \\ \angle DAM = \angle C = 90° \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADM \cong \triangle CDN(ASA)$，

$\therefore AM = NC$， $DM = DN$，

$\because \angle EOH = 45°$，

$\therefore \angle NDE = 45°$，

$\therefore \angle ADE + \angle CDN = 45°$，

$\therefore \angle ADE + \angle ADM = 45° = \angle MDE$，

在$\triangle NDE$ 和$\triangle MDE$ 中，

$$\begin{cases} ND = MD \\ \angle NDE = \angle MDE \\ DE = DE \end{cases},$$

$\therefore \triangle NDE \cong \triangle MDE(SAS)$，

$\therefore EM = EN$，

$\therefore AE + CN = EN$，

设 $AE = x$， 则 $BE = 3 - x$，

在 $Rt\triangle BEN$ 中， $BN^2 + BE^2 = EN^2$，

$\therefore 2^2 + (3-x)^2 = (x+1)^2$，

解得： $x = \dfrac{3}{2}$，

$\therefore DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{3^2+(\frac{3}{2})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.