



直线与圆的位置关系知识讲解

【学习目标】

1. 理解并掌握直线与圆的三种位置关系；
2. 理解切线的判定定理和性质定理.

【要点梳理】

要点一、直线与圆的位置关系

1. 切线的定义：

直线与圆有唯一的公共点时，这条直线叫做圆的切线，这个唯一的公共点叫做切点. 此时直线与圆的位置关系称为相切.

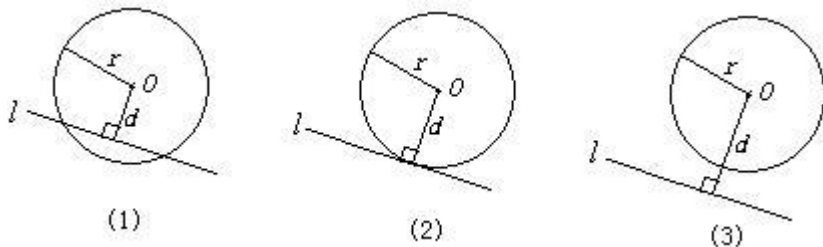
2. 直线和圆的三种位置关系：

- (1) 相交：当直线与圆有两个公共点时，叫做直线与圆相交.
- (2) 相切：当直线与圆有唯一公共点时，叫做直线与圆相切. 这条直线叫做圆的切线，公共点叫做切点.
- (3) 相离：当直线与圆没有公共点时，叫做直线与圆相离.

3. 直线与圆的位置关系的判定和性质.

直线与圆的位置关系能否像点与圆的位置关系一样通过一些条件来进行分析判断呢？

由于圆心确定圆的位置，半径确定圆的大小，因此研究直线和圆的位置关系，就可以转化为直线和点(圆心)的位置关系. 下面图(1)中直线与圆心的距离小于半径；图(2)中直线与圆心的距离等于半径；图(3)中直线与圆心的距离大于半径.



一般地，直线与圆的位置关系有以下定理：

如果 $\odot O$ 的半径为 r ，圆心 O 到直线 l 的距离为 d ，那么，

- (1) $d < r \Leftrightarrow$ 直线 l 与 $\odot O$ 相交；
- (2) $d = r \Leftrightarrow$ 直线 l 与 $\odot O$ 相切；
- (3) $d > r \Leftrightarrow$ 直线 l 与 $\odot O$ 相离.

要点诠释：

这三个命题从左边到右边反映了直线与圆的位置关系所具有的性质；从右边到左边则是直线与圆的位置关系的判定.

要点二、切线的性质定理和判定定理

1. 切线的性质定理：

圆的切线垂直于过切点的半径.

要点诠释：

切线的性质定理中要注意：圆的切线是与过切点的半径垂直，不是与任意半径都垂直.



2. 切线的判定定理:

过半径外端且垂直于半径的直线是圆的切线.

要点诠释:

切线的判定定理中强调两点: 一是直线与圆有一个交点, 二是直线与过交点的半径垂直, 缺一不可.

要点三、三角形的内切圆

1. 三角形的内切圆:

与三角形各边都相切的圆叫做三角形的内切圆.

2. 三角形的内心:

三角形内切圆的圆心是三角形三条角平分线的交点, 叫做三角形的内心. 三角形的内心到三边的距离都相等.

要点诠释:

(1) 任何一个三角形都有且只有一个内切圆, 但任意一个圆都有无数个外切三角形;

(2) 解决三角形内心的有关问题时, 面积法是常用的, 即三角形的面积等于周长与内切圆半径乘积的

一半, 即 $S = \frac{1}{2}Pr$ (S 为三角形的面积, P 为三角形的周长, r 为内切圆的半径).

【典型例题】

类型一、直线与圆的位置关系

1. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $AC=3$ 厘米, $BC=4$ 厘米, 以 C 为圆心, r 为半径的圆与 AB 有怎样的位置关系? 为什么?

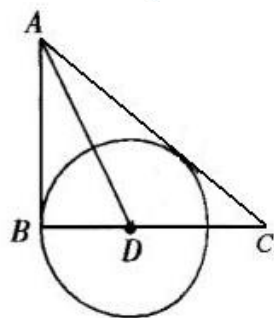
(1) $r=2$ 厘米; (2) $r=2.4$ 厘米; (3) $r=3$ 厘米

【变式】已知 $\odot O$ 的半径为 10cm , 如果一条直线和圆心 O 的距离为 10cm , 那么这条直线和这个圆的位置关系为 ()

A. 相离 B. 相切 C. 相交 D. 相交或相离

类型二、切线的判定与性质

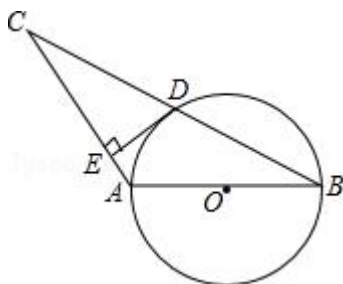
2. 如图所示, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle B=90^\circ$, $\angle A$ 的平分线交 BC 于 D , 以 D 为圆心, DB 长为半径作 $\odot D$. 求证: AC 是 $\odot D$ 的切线.



3. 如图， $\odot O$ 的直径 $AB=4$ ， $\angle ABC=30^\circ$ ， BC 交 $\odot O$ 于 D ， D 是 BC 的中点。

(1) 求 BC 的长；

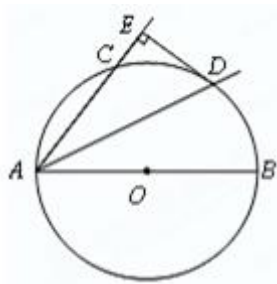
(2) 过点 D 作 $DE \perp AC$ ，垂足为 E ，求证：直线 DE 是 $\odot O$ 的切线。



4. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， AC 为 $\odot O$ 的弦， AD 平分 $\angle BAC$ ，交 $\odot O$ 于点 D ， $DE \perp AC$ ，交 AC 的延长线于点 E 。

(1) 判断直线 DE 与 $\odot O$ 的位置关系，并说明理由；

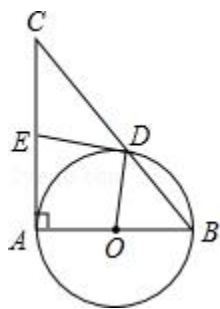
(2) 若 $AE=8$ ， $\odot O$ 的半径为 5，求 DE 的长。



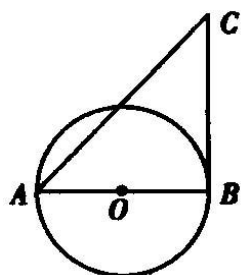
【变式 1】如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle CAB=90^\circ$ ， $\angle CBA=50^\circ$ ，以 AB 为直径作 $\odot O$ 交 BC 于点 D ，点 E 在边 AC 上，且满足 $ED=EA$ 。

(1) 求 $\angle DOA$ 的度数；

(2) 求证：直线 ED 与 $\odot O$ 相切。



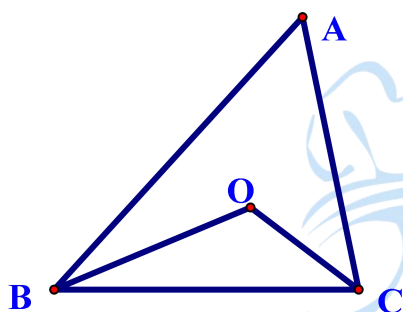
【变式 2】如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=BC=2$ ，以 AB 为直径的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 B ，则 AC 等于（ ）



- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{3}$

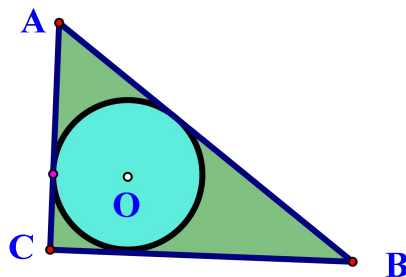
类型三、三角形的内切圆

5. 如图，已知 O 是 $\triangle ABC$ 的内心， $\angle A=50^\circ$ ，求 $\angle BOC$ 的度数.



【变式】如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $BC=4$ ， $AC=3$ ， $\odot O$ 内切与 $\triangle ABC$ ，则 $\triangle ABC$ 去除 $\odot O$ 剩余阴影部分的面积为（ ）

- A. $12-\pi$ B. $12-2\pi$ C. $14-4\pi$ D. $6-\pi$





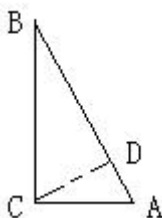
直线与圆的位置关系知识讲解

类型一、直线与圆的位置关系

1.

【答案与解析】

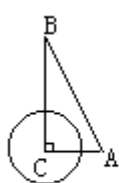
解：过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D，



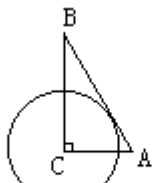
在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $AC=3$ ， $BC=4$ ，得 $AB=5$ ，

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \therefore AB \cdot CD = AC \cdot BC,$$

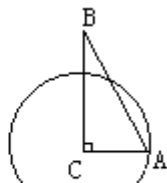
$$\therefore CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4 \text{ (cm)},$$



(1)



(2)



(3)



(1) 当 $r=2\text{cm}$ 时, $CD>r$, $\therefore$ 圆 C 与 AB 相离;

(2) 当 $r=2.4\text{cm}$ 时, $CD=r$, $\therefore$ 圆 C 与 AB 相切;

(3) 当 $r=3\text{cm}$ 时, $CD<r$, $\therefore$ 圆 C 与 AB 相交.

【总结升华】 欲判定 $\odot C$ 与直线 AB 的关系, 只需先求出圆心 C 到直线 AB 的距离 CD 的长, 然后再与 r 比较即可.

举一反三:

【变式】【答案】 B.

类型二、切线的判定与性质

2.

【思路点拨】 作垂直, 证半径.

【答案与解析】

证明: 过 D 作 $DF \perp AC$ 于 F .

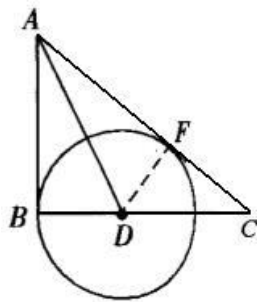
$\because \angle B=90^\circ$,

$\therefore DB \perp AB$.

又 AD 平分 $\angle BAC$,

$\therefore DF=BD=\text{半径}$.

$\therefore AC$ 与 $\odot D$ 相切.



【总结升华】 如果已知条件中不知道直线与圆有公共点, 其证法是过圆心作直线的垂线段, 再证明垂线段的长等于半径的长即可.

3.

【思路点拨】 (1) 根据圆周角定理求得 $\angle ADB=90^\circ$, 然后解直角三角形即可求得 BD , 进而求得 BC 即可; (2) 要证明直线 DE 是 $\odot O$ 的切线只要证明 $\angle EDO=90^\circ$ 即可.

【答案与解析】

证明: (1) 解: 连接 AD ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ADB=90^\circ$,

又 $\because \angle ABC=30^\circ$, $AB=4$,

$\therefore BD=2\sqrt{3}$,

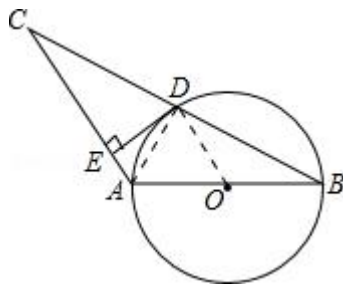
$\because D$ 是 BC 的中点,

$\therefore BC=2BD=4\sqrt{3}$;

(2) 证明: 连接 OD .

$\because D$ 是 BC 的中点, O 是 AB 的中点,

$\therefore DO$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,





$\therefore OD \parallel AC$, 则 $\angle EDO = \angle CED$

又 $\because DE \perp AC$,

$\therefore \angle CED = 90^\circ$, $\angle EDO = \angle CED = 90^\circ$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

【总结升华】 此题主要考查了切线的判定以及含 30° 角的直角三角形的性质. 解题时要注意连接过切点的半径是圆中的常见辅助线.

4.

【思路点拨】 (1) 连接 OD , 证明 $OD \perp AD$ 即可; (2) 作 $DF \perp AB$ 于 F , 证明 $\triangle EAD \cong \triangle FAD$, 将 DE 转化成 DF 来求.

【答案与解析】

解: (1) 直线 DE 与 $\odot O$ 相切.

理由如下:

连接 OD .

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle EAD = \angle OAD$.

$\because OA = OD$,

$\therefore \angle ODA = \angle OAD$.

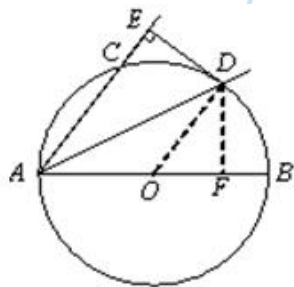
$\therefore \angle ODA = \angle EAD$.

$\therefore EA \parallel OD$.

$\because DE \perp EA$,

$\therefore DE \perp OD$.

又 $\because$ 点 D 在 $\odot O$ 上, $\therefore$ 直线 DE 与 $\odot O$ 相切.



(2) 如上图, 作 $DF \perp AB$, 垂足为 F .

$\therefore \angle DFA = \angle DEA = 90^\circ$.

$\because \angle EAD = \angle FAD$, $AD = AD$,

$\therefore \triangle EAD \cong \triangle FAD$.

$\therefore AF = AE = 8$, $DF = DE$.



$$\because OA=OD=5, \therefore OF=3.$$

$$\text{在 Rt}\triangle DOF \text{ 中, } DF=\sqrt{5^2-3^2}=4.$$

$$\therefore DE=DF=4.$$

【总结升华】 本题综合考察了平行线的判定, 全等三角形的判定和勾股定理的应用, 是一道很不错的中档题.

【变式 1】【答案与解析】

$$(1) \text{ 解: } \because \angle DBA=50^\circ, \\ \therefore \angle DOA=2\angle DBA=100^\circ,$$

(2) 证明: 连接 OE.

$$\text{在 } \triangle EAO \text{ 与 } \triangle EDO \text{ 中, } \begin{cases} AO=DO \\ EA=ED, \\ EO=EO \end{cases}$$

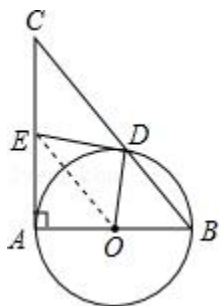
$$\therefore \triangle EAO \cong \triangle EDO,$$

$$\therefore \angle EDO = \angle EAO,$$

$$\because \angle BAC=90^\circ,$$

$$\therefore \angle EDO=90^\circ,$$

$\therefore DE$ 与 $\odot O$ 相切.



【变式 2】【答案】 因为以 AB 为直径的 $\odot O$ 与 BC 相切于点 B, 所以 $\angle ABC=90^\circ$,

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}, \text{ 故选 C.}$$

类型三、三角形的内切圆

5.

【思路点拨】 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\angle A=50^\circ$, 根据内切圆的性质可求

$$\angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ, \text{ 在 } \triangle BOC \text{ 中, 根据三角形内角和求出 } \angle BOC \text{ 的度数.}$$

【答案与解析】

解: $\because O$ 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\angle A=50^\circ$,

$$\therefore \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2}(180^\circ - 50^\circ) = 65^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ.$$

【变式】【答案】 D.

