



正多边形和圆知识讲解

【学习目标】

1. 了解正多边形和圆的有关概念及对称性；
2. 理解并掌握正多边形半径和边长、边心距、中心角之间的关系，会应用正多边形和圆的有关知识画正多边形；
3. 会进行正多边形的有关计算.

【要点梳理】

知识点一、正多边形的概念

各边相等，各角也相等的多边形是正多边形.

要点诠释：

判断一个多边形是否是正多边形，必须满足两个条件：(1)各边相等；(2)各角相等；缺一不可.如菱形的各边都相等，矩形的各角都相等，但它们都不是正多边形(正方形是正多边形).

知识点二、正多边形的重要元素

1. 正多边形的外接圆和圆的内接正多边形

正多边形和圆的关系十分密切，只要把一个圆分成相等的一些弧，就可以作出这个圆的内接正多边形，这个圆就是这个正多边形的外接圆.

2. 正多边形的相关概念

- (1) 一个正多边形的外接圆的圆心叫做这个正多边形的中心.
- (2) 正多边形外接圆的半径叫做正多边形的半径.
- (3) 正多边形每一边所对的圆心角叫做正多边形的中心角.
- (4) 正多边形的中心到正多边形的一边的距离叫做正多边形的边心距.

3. 正多边形的相关计算

(1) 正 n 边形每一个内角的度数是 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$;

(2) 正 n 边形每个中心角的度数是 $\frac{360^\circ}{n}$;

(3) 正 n 边形每个外角的度数是 $\frac{360^\circ}{n}$.

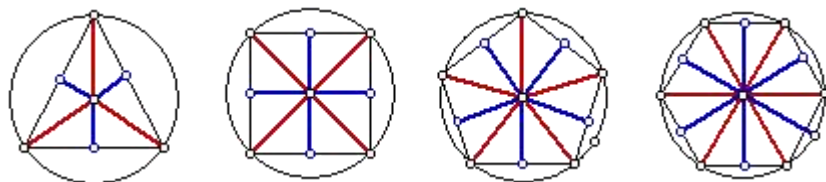
要点诠释：要熟悉正多边形的基本概念和基本图形，将待解决的问题转化为直角三角形.

知识点三、正多边形的性质

1. 正多边形都只有一个外接圆，圆有无数个内接正多边形.
2. 正 n 边形的半径和边心距把正 n 边形分成 $2n$ 个全等的直角三角形.
3. 正多边形都是轴对称图形，对称轴的条数与它的边数相同，每条对称轴都通过正 n 边形的中心；当



边数是偶数时，它也是中心对称图形，它的中心就是对称中心。



4. 边数相同的正多边形相似。它们周长的比，边心距的比，半径的比都等于相似比，面积的比等于相似比的平方。

5. 任何正多边形都有一个外接圆和一个内切圆，这两个圆是同心圆

要点诠释：(1) 各边相等的圆的内接多边形是圆的内接正多边形；(2) 各角相等的圆的外切多边形是圆的外切正多边形。

知识点四、正多边形的画法

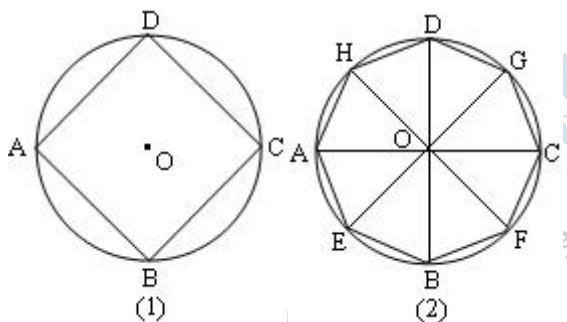
1. 用量角器等分圆

由于在同圆中相等的圆心角所对的弧也相等，因此作相等的圆心角(即等分顶点在圆心的周角)可以等分圆；根据同圆中相等弧所对的弦相等，依次连接各分点就可画出相应的正 n 边形。

2. 用尺规等分圆

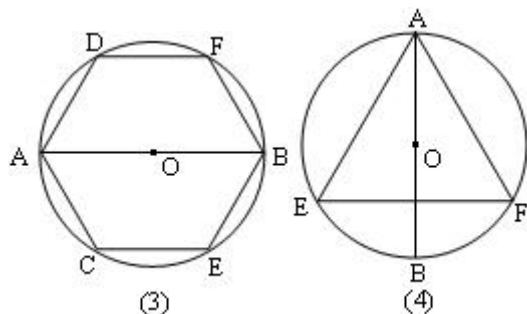
对于一些特殊的正 n 边形，可以用圆规和直尺作图。

①正四、八边形。



在 $\odot O$ 中，用尺规作两条互相垂直的直径就可把圆分成 4 等份，从而作出正四边形。再逐次平分各边所对的弧(即作 $\angle AOB$ 的平分线交 $\widehat{AB}$ 于 E) 就可作出正八边形、正十六边形等，边数逐次倍增的正多边形。

②正六、三、十二边形的作法。



通过简单计算可知，正六边形的边长与其半径相等，所以，在 $\odot O$ 中，任画一条直径 AB ，分别以 A 、 B 为圆心，以 $\odot O$ 的半径为半径画弧与 $\odot O$ 相交于 C 、 D 和 E 、 F ，则 A 、 C 、 E 、 B 、 F 、 D 是 $\odot O$ 的 6 等分点。

显然， A 、 E 、 F (或 C 、 B 、 D) 是 $\odot O$ 的 3 等分点。

同样，在图(3)中平分每条边所对的弧，就可把 $\odot O$ 12 等分……。



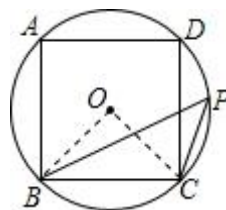
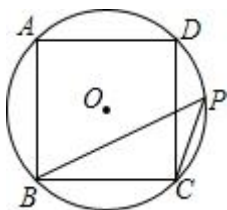
要点诠释：画正 n 边形的方法：(1) 将一个圆 n 等份，(2) 顺次连结各等分点.

【典型例题】

类型一、正多边形的概念

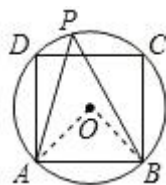
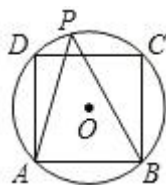
1. 已知：如图，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接正方形，点 P 是劣弧上不同于点 C 的任意一点，则 $\angle BPC$ 的度数是 ()

- A. 45° B. 60° C. 75° D. 90°



【变式】如图， $\odot O$ 是正方形 $ABCD$ 的外接圆，点 P 在 $\odot O$ 上，则 $\angle APB$ 等于 ()

- A. 30° B. 45° C. 55° D. 60°



2. 如图 1， $\triangle PQR$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形，四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接正方形， $BC \parallel QR$ ，则 $\angle AOQ =$ ()

- A. 60° B. 65° C. 72° D. 75°

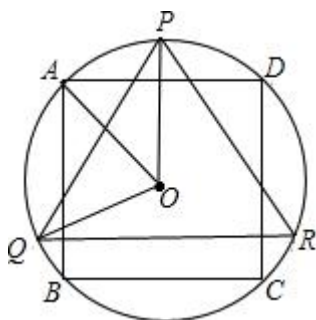


图 1

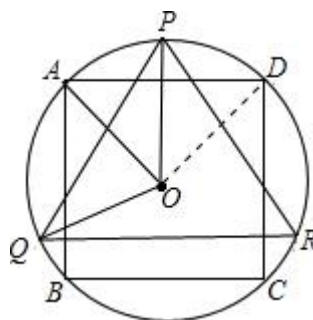
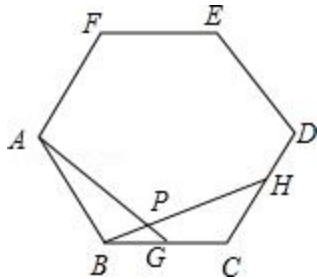


图 2



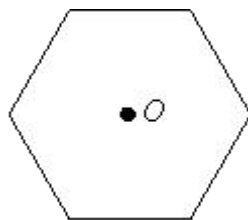
类型二、正多边形和圆的有关计算

3. 如图，点 G , H 分别是正六边形 $ABCDEF$ 的边 BC , CD 上的点，且 $BG=CH$, AG 交 BH 于点 P . (1) 求证: $\triangle ABG \cong \triangle BCH$;
(2) 求 $\angle APH$ 的度数.



4. 若同一个圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边长分别记作 a_3 , a_4 , a_6 , 则 $a_3 : a_4 : a_6$ 等于 ()
A. $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ B. $1 : 2 : 3$ C. $3 : 2 : 1$ D. $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$

【变式】如图是对称中心为点 O 的正六边形. 如果用一个含 30° 角的直角三角板的角, 借助点 O (使角的顶点落在点 O 处), 把这个正六边形的面积 n 等分, 那么 n 的所有可能的值是 _____.





正多边形和圆知识讲解

类型一、正多边形的概念

1.

【答案】A.

【解析】如图，连接 OB、OC，则 $\angle BOC=90^\circ$ ，

根据圆周角定理，得： $\angle BPC=\frac{1}{2}\angle BOC=45^\circ$.

故选 A.

【点评】本题主要考查了正方形的性质和圆周角定理的应用.

举一反三：

【变式】【答案】连接 OA，OB. 根据正方形的性质，得 $\angle AOB=90^\circ$. 再根据圆周角定理，得 $\angle APB=45^\circ$.

故选 B.

2.

【思路点拨】

连接 OD，根据题意求出 $\angle POQ$ 和 $\angle AOD$ 的度数，利用平行关系求出 $\angle AOP$ 度数，即可求出 $\angle AOQ$ 的度数.

【答案】D.

【解析】如图 2，连接 OD，由题意可知 $\angle POQ=120^\circ$ ， $\angle AOD=90^\circ$ ，

由 $BC \parallel RQ$ 可知 P 为弧 AD 的中点，所以 $\angle AOP=45^\circ$ ，

所以 $\angle AOQ=\angle POQ-\angle AOP=120^\circ-45^\circ=75^\circ$.

故选 D.

【点评】解决此类问题的关键是作出恰当的辅助线（如正多边形的半径、边心距、中心角等），再利用正多边形与圆有关性质求解.



类型二、正多边形和圆的有关计算

3.

【答案与解析】

(1) 证明: $\because$ 在正六边形 ABCDEF 中,
AB=BC, $\angle ABC = \angle C = 120^\circ$,

在 $\triangle ABG$ 与 $\triangle BCH$ 中 $\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABC = \angle C = 120^\circ \\ BG=CH \end{cases}$,

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle BCH$;

(2) 解: 由 (1) 知: $\triangle ABG \cong \triangle BCH$,

$\therefore \angle BAG = \angle HBC$,

$\therefore \angle BPG = \angle ABG = 120^\circ$,

$\therefore \angle APH = \angle BPG = 120^\circ$.

【点评】 本题考查了正多边形的性质及相关计算, 解题的关键是正确地利用正六边形中相等的元素.

4.

【思路点拨】 从中心向边作垂线, 构建直角三角来解决.

【答案】 D.

【解析】 解: 设圆的半径是 r ,

则多边形的半径是 r ,

如图 1, 则内接正三角形的边长 $a_3 = \sqrt{3}r$,

如图 2, 内接正方形的边长是 $a_4 = \sqrt{2}r$,

如图 3, 正六边形的边长是 $a_6 = r$,

因而半径相等的圆的内接正三角形、正方形、正六边形的边长之比 $a_3 : a_4 : a_6 = \sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$.

故选 D.



图1

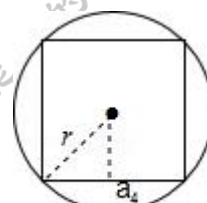


图2

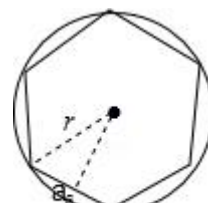


图3

【点评】 本题考查了正多边形和圆, 正多边形的计算一般是通过中心作边的垂线, 连接半径, 构造直角三角形来求解.

【变式】【答案】

根据圆内接正多边形的性质可知, 只要把此正六边形再化为正多边形即可,

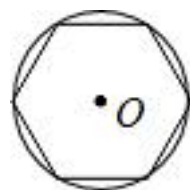
即可知: $360 \div 30 = 12$;

$360 \div 60 = 6$;

$360 \div 90 = 4$;

$360 \div 120 = 3$;

$360 \div 180 = 2$.





故么 n 的所有可能的值是 2, 3, 4, 6, 12.

