



弧长和扇形面积知识讲解

【学习目标】

1. 通过复习圆的周长、圆的面积公式，探索 n° 的圆心角所对的弧长和扇形面积的公式，并应用这些公式解决问题；
2. 能准确计算组合图形的面积.

【要点梳理】

要点一、弧长公式

半径为 R 的圆中

360° 的圆心角所对的弧长(圆的周长)公式: $C = 2\pi R$

n° 的圆心角所对的圆的弧长公式: $l = \frac{n\pi R}{180}$ (弧是圆的一部分)

要点诠释:

- (1) 对于弧长公式，关键是要理解 1° 的圆心角所对的弧长是圆周长的 $\frac{1}{360}$ ，即 $\frac{1}{360} \times 2\pi R = \frac{\pi R}{180}$ ；
- (2) 公式中的 n 表示 1° 圆心角的倍数，故 n 和 180 都不带单位， R 为弧所在圆的半径；
- (3) 弧长公式所涉及的三个量：弧长、圆心角度数、弧所在圆的半径，知道其中的两个量就可以求出第三个量.

要点二、扇形面积公式

1. 扇形的定义

由组成圆心角的两条半径和圆心角所对的弧所围成的图形叫做扇形.

2. 扇形面积公式

半径为 R 的圆中

360° 的圆心角所对的扇形面积(圆面积)公式: $S = \pi R^2$

n° 的圆心角所对的扇形面积公式: $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2}lR$

要点诠释:

- (1) 对于扇形面积公式，关键要理解圆心角是 1° 的扇形面积是圆面积的 $\frac{1}{360}$ ，
即 $\frac{1}{360} \times \pi R^2 = \frac{\pi R^2}{360}$ ；
- (2) 在扇形面积公式中，涉及三个量：扇形面积 S 、扇形半径 R 、扇形的圆心角，知道其中的两个量就可以求出第三个量.
- (3) 扇形面积公式 $S_{\text{扇形}} = \frac{1}{2}lR$ ，可根据题目条件灵活选择使用，它与三角形面积公式 $S = \frac{1}{2}ah$ 有点类似，可类比记忆；

(4) 扇形两个面积公式之间的联系: $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2} \times \frac{n\pi R}{180} \times R = \frac{1}{2}lR$.

【典型例题】



类型一、弧长和扇形的有关计算

1. 如图 (1), AB 切 $\odot O$ 于点 B , $OA=2\sqrt{3}$, $AB=3$, 弦 $BC \parallel OA$, 则劣弧 $\widehat{BC}$ 的弧长为 ().

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ C. π D. $\frac{3}{2}\pi$

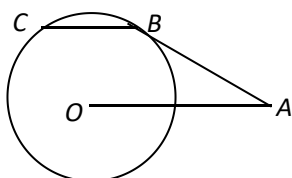
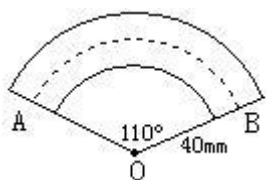
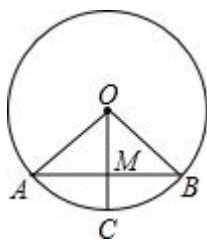


图 (1)

【变式】制作弯形管道时, 需要先按中心线计算“展直长度”再下料, 试计算如图所示的管道的展直长度, 即 $\widehat{AB}$ 的长 (结果精确到 0.1mm)



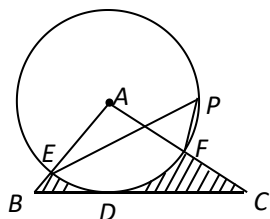
2. 如图, $\odot O$ 的半径等于 1, 弦 AB 和半径 OC 互相平分于点 M . 求扇形 $OACB$ 的面积 (结果保留 π)





【变式】如图(1)，在 $\triangle ABC$ 中， $BC=4$ ，以点A为圆心，2为半径的 $\odot A$ 与BC相切于点D，交AB于E，交AC于F，点P是 $\odot A$ 上的一点，且 $\angle EPF=40^\circ$ ，则图中阴影部分的面积是()。

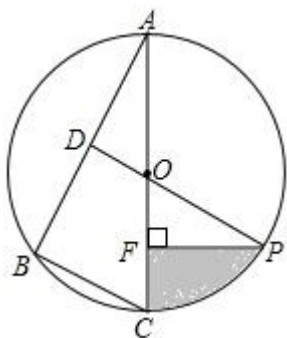
- A. $4 - \frac{4}{9}\pi$ B. $4 - \frac{8}{9}\pi$ C. $8 - \frac{4}{9}\pi$ D. $8 - \frac{8}{9}\pi$



图(1)

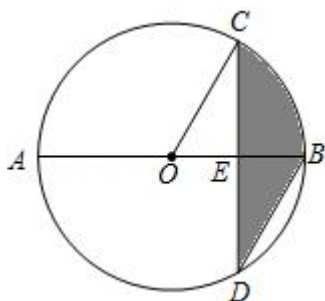
3. 如图，已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，AC是直径， $\angle A=30^\circ$ ， $BC=2$ ，点D是AB的中点，连接DO并延长交 $\odot O$ 于点P，过点P作 $PF \perp AC$ 于点F。

- (1) 求劣弧PC的长；(结果保留 π)
(2) 求阴影部分的面积。(结果保留 π)。



类型二、组合图形面积的计算

4. 如图，AB是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ，垂足为E， $\angle CDB=30^\circ$ ， $CD=2\sqrt{3}$ ，求图中阴影部分的面积。





弧长和扇形面积知识讲解

类型一、弧长和扇形的有关计算

1.

【答案】A.

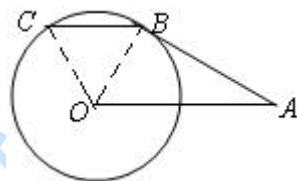
【解析】连结 OB、OC，如图（2）

则 $\angle OBA = 90^\circ$ ， $OB = \sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， $\angle AOB = 60^\circ$ ，

由弦 $BC \parallel OA$ 得 $\angle OBC = \angle AOB = 60^\circ$ ，

所以 $\triangle OBC$ 为等边三角形， $\angle BOC = 60^\circ$ 。

则劣弧 $\widehat{BC}$ 的弧长为 $\frac{60\pi\sqrt{3}}{180} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ，故选 A.



图（2）

【总结升华】主要考查弧长公式： $l = \frac{n\pi R}{180}$ 。

【变式】【答案】 $R=40\text{mm}$ ， $n=110$

$$\therefore \widehat{AB} \text{ 的长} = \frac{n\pi R}{180} = \frac{110 \times 40\pi}{180} \approx 76.8(\text{mm})$$

因此，管道的展直长度约为 76.8mm.

2. 【答案与解析】 $\because$ 弦 AB 和半径 OC 互相平分，

$\therefore OC \perp AB$ ，

$$OM = MC = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}OA.$$

$$\therefore \angle B = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 120^\circ$$

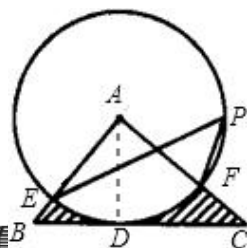
$$\therefore S_{\text{扇形}} = \frac{120 \cdot \pi \cdot 1}{360} = \frac{\pi}{3}.$$

【总结升华】运用了垂径定理的推论，考查扇形面积计算公式.

【变式】【答案】连结 AD，则 $AD \perp BC$ ，

$$\triangle ABC \text{ 的面积是: } \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4,$$

$$\angle A = 2\angle EPF = 80^\circ.$$





则扇形 EAF 的面积是: $\frac{80\pi \times 2^2}{360} = \frac{8}{9}\pi$.

故阴影部分的面积 = $\triangle ABC$ 的面积 - 扇形 EAF 的面积 = $4 - \frac{8}{9}\pi$. 故选 B.

3.

【答案与解析】

解: (1) $\because$ 点 D 是 AB 的中点, PD 经过圆心,

$\therefore PD \perp AB$,

$\therefore \angle A = 30^\circ$,

$\therefore \angle POC = \angle AOD = 60^\circ$, $OA = 2OD$,

$\therefore PF \perp AC$,

$\therefore \angle OPF = 30^\circ$,

$\therefore OF = \frac{1}{2}OP$,

$\therefore OA = OC$, $AD = BD$,

$\therefore BC = 2OD$,

$\therefore OA = BC = 2$,

$\therefore \odot O$ 的半径为 2,

$\therefore$ 劣弧 PC 的长 = $\frac{n\pi r}{180} = \frac{60\pi \times 2}{180} = \frac{2}{3}\pi$;

(2) $\because OF = \frac{1}{2}OP$,

$\therefore OF = 1$,

$\therefore PF = \sqrt{OP^2 - OF^2} = \sqrt{3}$,

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}} - S_{\triangle OPF} = \frac{60\pi \times 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

【总结升华】 本题考查了垂径定理的应用, 弧长公式以及扇形的面积公式等知识, 求得圆的半径和扇形的圆心角的度数是解题的关键.

类型二、组合图形面积的计算

4.

【答案与解析】

解: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$,

$\therefore CE = \sqrt{3}$.

$\therefore \angle CDB = 30^\circ$,

$\therefore \angle COE = 60^\circ$,

在 $Rt\triangle OEC$ 中, $OC = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$,

$\therefore CE = DE$,



$$\angle COE = \angle DBE = 60^\circ$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle COE \cong \text{Rt} \triangle DBE,$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形 OBC}} = \frac{1}{6} \pi \times OC^2 = \frac{1}{6} \pi \times 4 = \frac{2}{3} \pi.$$

【总结升华】 本题考查了垂径定理，扇形的面积等，解此题的关键是求出扇形和三角形的面积.

