



切线长定理知识讲解

【学习目标】

1. 了解切线长定义, 掌握切线长定理;
2. 了解圆外切四边形定义及性质;
3. 利用切线长定理解决相关的计算和证明.

【要点梳理】

要点一、切线长定理

1. 切线长:

经过圆外一点作圆的切线, 这点和切点之间的线段的长, 叫做这点到圆的切线长.

要点诠释:

切线长是指圆外一点和切点之间的线段的长, 不是“切线的长”的简称. 切线是直线, 而非线段.

2. 切线长定理:

从圆外一点可以引圆的两条切线, 它们的切线长相等, 这一点和圆心的连线平分两条切线的夹角.

要点诠释:

切线长定理包含两个结论: 线段相等和角相等.

要点二、圆外切四边形的性质

1. 圆外切四边形

四边形的四条边都与同一个圆相切, 那么这个四边形叫做圆的外切四边形.

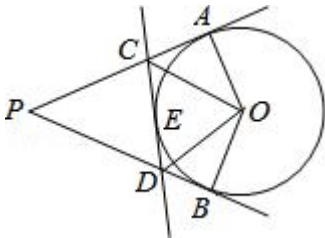
2. 圆外切四边形性质

圆外切四边形的两组对边之和相等.

【典型例题】

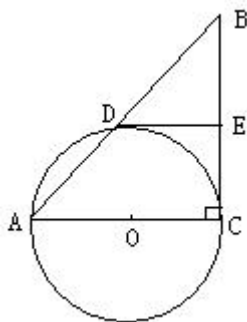
类型一、切线长定理

1. 已知 PA 、 PB 分别切 $\odot O$ 于 A 、 B , E 为劣弧 AB 上一点, 过 E 点的切线交 PA 于 C 、交 PB 于 D .
 - (1) 若 $PA=6$, 求 $\triangle PCD$ 的周长.
 - (2) 若 $\angle P=50^\circ$ 求 $\angle DOC$.

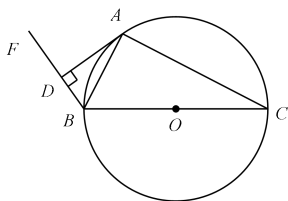




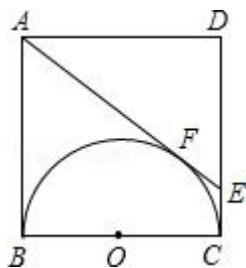
2. 如图, $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, 以 AC 为直径的 $\odot O$ 交 AB 于 D , E 为 BC 中点.
求证: DE 是 $\odot O$ 切线.



【变式】已知: 如图, $\odot O$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, BC 为 $\odot O$ 的直径, 作射线 BF , 使得 BA 平分 $\angle CBF$, 过点 A 作 $AD \perp BF$ 于点 D . 求证: DA 为 $\odot O$ 的切线.



3. 如图, 正方形 $ABCD$ 边长为 4cm , 以正方形的一边 BC 为直径在正方形 $ABCD$ 内作半圆, 过 A 作半圆的切线, 与半圆相切于 F 点, 与 DC 相交于 E 点, 则 $\triangle ADE$ 的面积 ()



- A. 12 B. 24 C. 8 D. 6



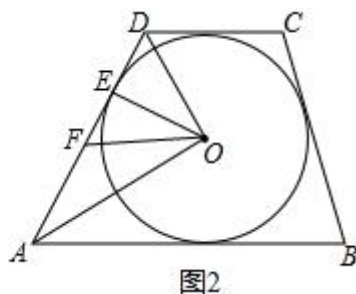
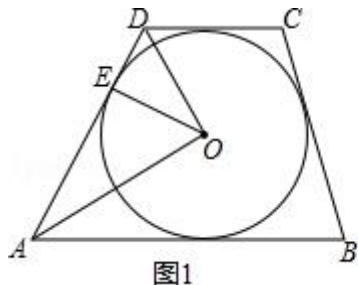
类型二、圆外切四边形

4. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\odot O$ 为内切圆, E 为切点.

(I) 如图 1, 求 $\angle AOD$ 的度数;

(II) 如图 1, 若 $AO=8\text{cm}$, $DO=6\text{cm}$, 求 AD 、 OE 的长;

(III) 如图 2, 若 F 是 AD 的中点, 在 (II) 中条件下, 求 FO 的长.



【变式】在圆外切四边形 $ABCD$ 中, $AB:BC:CD:AD$ 只可能是 ().

- A. 2:3:4:5 B. 3:4:6:5 C. 5:4:1:3 D. 3:4:2:5



切线长定理知识讲解

类型一、切线长定理

1.

【答案与解析】

解：(1) 连接 OE,

$\because PA, PB$ 与圆 O 相切,

$\therefore PA=PB=6$,

同理可得: $AC=CE, BD=DE$,

$\triangle PCD$ 的周长 $= PC+PD+CD=PC+PD+CE+DE=PA+PB=12$;

(2) $\because PA, PB$ 与圆 O 相切,

$\therefore \angle OAP=\angle OBP=90^\circ \angle P=50^\circ$,

$\therefore \angle AOB=360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 50^\circ =130^\circ$,

在 $Rt\triangle AOC$ 和 $Rt\triangle EOC$ 中,

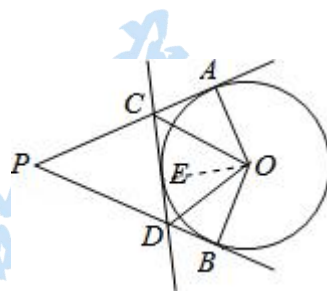
$$\begin{cases} OA=OE \\ OC=OC \end{cases}$$

$\therefore Rt\triangle AOC \cong Rt\triangle EOC$ (HL),

$\therefore \angle AOC=\angle COE$,

同理: $\angle DOE=\angle BOD$,

$\therefore \angle COD=\frac{1}{2}\angle AOB=65^\circ$.



【总结升华】 本题考查的是切线长定理和全等三角形的判定和性质, 掌握切线长定理是解题的关键.

2.

【答案与解析】

连结 OD, CD , AC 是直径, $\therefore OA=OC=OD$, $\therefore \angle OCD=\angle ODC$,

$\angle ADC=90^\circ$, $\therefore \triangle CDB$ 是直角三角形.

$\because E$ 是 BC 的中点, $\therefore DE=EB=EC$, $\therefore \angle ECD=\angle EDC$, $\angle ECD+\angle OCD=90^\circ$,

$\therefore \angle EDC+\angle ODC=90^\circ$, 即 $OD \perp ED$,

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 切线.

【总结升华】 自然连接 OD , 可证 $OD \perp DE$.

【变式】

【答案】 连接 AO .

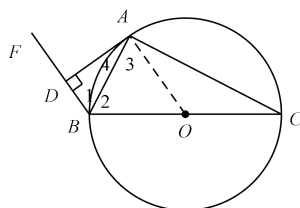
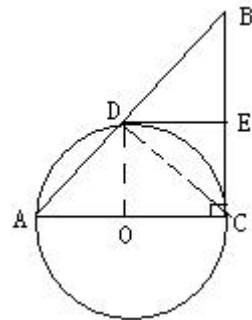
$\because AO=BO$, $\therefore \angle 2=\angle 3$.

$\because BA$ 平分 $\angle CBF$, $\therefore \angle 1=\angle 2$. $\therefore \angle 3=\angle 1$.

$\therefore DB \parallel AO$.

$\because AD \perp DB$, $\therefore \angle BDA=90^\circ$. $\therefore \angle DAO=90^\circ$.

$\because AO$ 是 $\odot O$ 半径, $\therefore DA$ 为 $\odot O$ 的切线.





3.

【答案】D;

【解析】

∵AE 与圆 O 切于点 F,

显然根据切线长定理有 $AF=AB=4\text{cm}$, $EF=EC$,

设 $EF=EC=x\text{cm}$,

则 $DE=(4-x)\text{cm}$, $AE=(4+x)\text{cm}$,

在三角形 ADE 中由勾股定理得:

$$(4-x)^2 + 4^2 = (4+x)^2,$$

$$\therefore x=1\text{cm},$$

$$\therefore CE=1\text{cm},$$

$$\therefore DE=4-1=3\text{cm},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = AD \cdot DE \div 2 = 3 \times 4 \div 2 = 6\text{cm}^2.$$

【总结升华】此题主要考查圆的切线长定理, 正方形的性质和勾股定理等知识, 解答本题关键是运用切线

长定理得出 $AB=AF$, $EF=EC$.

类型二、圆外切四边形

4.

【答案与解析】解: (I) ∵⊙O 为四边形 ABCD 的内切圆,

∴AD、AB、CD 为⊙O 的切线,

∴OD 平分 $\angle ADC$, OA 平分 $\angle BAD$,

$$\text{即 } \angle ODA = \frac{1}{2} \angle ADC, \angle OAD = \frac{1}{2} \angle BAC,$$

∵AB//CD,

$$\therefore \angle ADC + \angle BAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ODA + \angle OAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ;$$

(II) 在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中, ∵AO=8cm, DO=6cm,

$$\therefore AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)},$$

∵AD 切⊙O 于 E,

∴OE⊥AD,

$$\therefore \frac{1}{2} OE \cdot AD = \frac{1}{2} OD \cdot OA,$$

$$\therefore OE = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5} \text{ (cm)};$$

(III) ∵F 是 AD 的中点,

$$\therefore FO = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} \times 10 = 5 \text{ (cm)}.$$

【总结升华】本题考查了三角形的内切圆与内心, 也考查了切线长定理.

【变式】【答案】B.