



北京课改版九上数学月考卷（三）

一. 选择

1. 下列各式是一元二次方程的是（ ）

A. $x(x+2) = x^2$

B. $x^2 + y + 1 = 0$

C. $x^2 - \frac{1}{x} - 2 = 0$

D. $(x-1)(x+2) = x$

2. 一元二次方程 $2x^2 + 5x = 6$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别是（ ）

A. 2, 5, 6

B. 5, 2, 6

C. 2, 5, -6

D. 5, 2, -6

3. 用配方法解方程 $x^2 - 4x + 1 = 0$, 下列配方正确的是（ ）

A. $(x-2)^2 = 5$

B. $(x+2)^2 = 5$

C. $(x-2)^2 = 3$

D. $(x+2)^2 = 3$

4. 关于 x 的方程 $x^2 + 2x - m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 m 的值是（ ）

A. 1

B. -1

C. 2

D. -2

5. 把抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向下平移 2 个单位, 得到抛物线解析式为（ ）

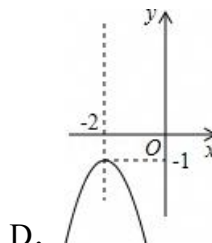
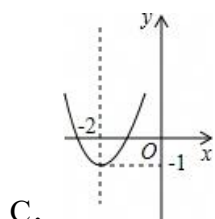
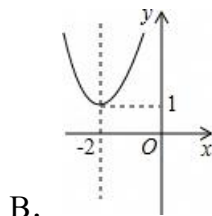
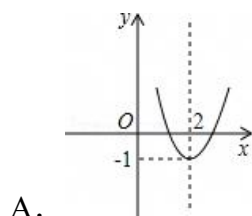
A. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

B. $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

C. $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$

D. $y = \frac{1}{2}(x-2)^2$

6. 二次函数 $y = 2(x+2)^2 - 1$ 的图象是（ ）





7. 观察下列表格, 估计一元二次方程 $x^2+3x-5=0$ 的正数解在 ()

x	-1	0	1	2	3	4
x^2+3x-5	-7	-5	-1	5	13	23

A. -1 和 0 之间 B. 1 和 2 之间 C. 0 和 1 之间 D. 2 和 3 之间

8. 对于抛物线 $y=(x-1)^2-3$, 下列说法正确的个数是 ()

- ①抛物线开口向上;
- ②图象的对称轴为直线 $x=1$;
- ③当 $x<1$ 时, y 随 x 的增大而增大;
- ④当 $x=1$ 时, y 有最小值 -3.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二. 填空题

9. 一元二次方程 $x^2=3x$ 的根是 _____ .

10. 已知一元二次方程 $ax^2+x-b=0$ 的一根为 1, 则 $a-b$ 的值是_____ .

11. 已知抛物线 $y=x^2+3$, 它与 y 轴的交点坐标为_____ .

12. 抛物线 $y=(x-1)^2+2$ 的顶点坐标是 _____ .

13. 已知抛物线 $y=(x-h)^2+4$ 经过 $(-3, m)$ 和 $(5, m)$ 两点, 则 h 的值为_____ .

14. 已知直角三角形的两条直角边的长恰好是方程 $x^2-5x+6=0$ 的两根, 则此直角三角形的面积为 _____ .

15. 设 $A(2, y_1)$, $B(3, y_2)$, $C(-4, y_3)$ 是抛物线 $y=3(x-1)^2+k$ 图象上的三点, 则 y_1 , y_2 , y_3 的大小关系为_____ (用“ $<$ ”连接).



16. 生活垃圾无害化处理可以降低垃圾及其衍生物对环境的影响. 据统计, 2017 年全国生活垃圾无害化处理能力约为 2.5 亿吨, 随着设施的增加和技术的发展, 2019 年提升到约 3.2 亿吨. 如果设这两年全国生活垃圾无害化处理能力的年平均增长率为 x , 那么根据题意可以列方程为_____.

三. 解答题

17. 计算: $2^{-1} - |2 - \sqrt{3}| + \sqrt{12} + (\pi + 1)^0$.

18. 解关于 x 的方程:

(1) $x^2 - 4x = 5$.

(2) $3x^2 - 1 = 4x$;

(3) $(x - 1)^2 = 2(x - 1)$.



19. 已知 m 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的根, 求代数式 $m(m - 1) + 5$ 的值.

20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (k+4)x + k+3 = 0$.

(1) 求证: 不论 k 为何值, 该方程总有两个实数根;

(2) 若该方程有一个根是负数, 求 k 的取值范围.



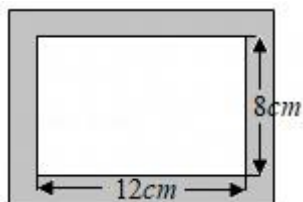
21. 在平面直角坐标系中，顶点为 $P(4, -1)$ 的抛物线交 y 轴于 $A(0, 3)$ ，求此抛物线的解析式.

22. 已知抛物线 $y=ax^2$ ($a \neq 0$)，坐标系中有两点 $A(2, 4)$ ， $B(4, 4)$.

- (1) 若抛物线经过点 $A(2, 4)$ ，求该抛物线的解析式；
- (2) 若此抛物线与线段 AB 有一个公共点，求 a 的取值范围.



23. 要在一个 $8\text{cm} \times 12\text{cm}$ 的照片外侧的四周镶上宽度相同的银边. 并且要使银边的面积和照片的面积相等. 那么银边的宽应该是多少?



24. 已知二次函数的解析式为: $y = (x+1)^2 - 4$;

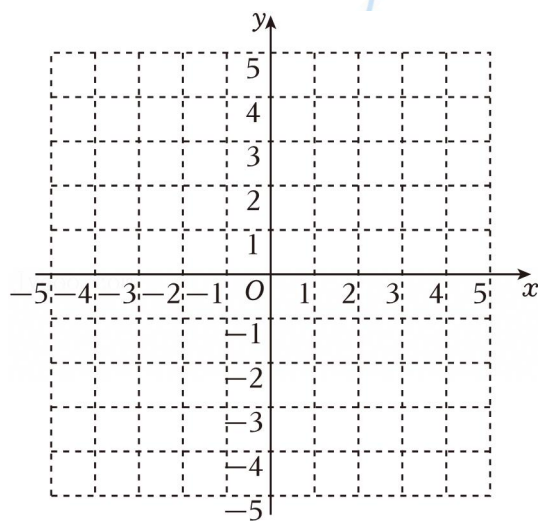
(1) 此抛物线的顶点坐标为 _____ ; 与 x 轴的两个交点坐标为 _____ ;

(2) 在上边的坐标系中, 画出该抛物线;

(3) 根据图象回答:

①若函数 $y = (x+1)^2 - 4$ 上有点 $P(m, n)$, 若 $n < 0$, 则 m 的取值范围是 _____ ;

②当 $-2 < x < 2$ 时, 求函数 y 的取值范围 _____ .





25. 在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+c$ ($a>0$) 经过点 $(1, 0)$

(1) 用含 a 的式子表示 c ;

(2) 直线 $y=ax$ 与抛物线交于 A 和 B 两点 (A 点在 B 点的左侧), 在直线 AB 上有点 $E(m, n)$, 过点 E 作 x 轴的垂线, 交抛物线于点 F .

①若 $a=1$, $m=1$ 时, 求 EF 的长;

②若 $m=2$, $EF=4$, 求 a 的值.



26. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle ABC=\alpha$, 点 D 在射线 CB 上, 连接 AD , 将线段 AD 逆时针旋转 $180^\circ - 2\alpha$ 得到线段 AE (点 E 不在直线 AB 上), 连接 BE , 过点 E 作 $EF \parallel AB$, 交直线 BC 于点 F .

(1) 如图1, 当点 D 与点 C 重合时, 求证: $BF=BE$;

(2) 如图2, 当点 D 在线段 CB 上, F 在线段 CB 的延长线上时, 用等式表示 DF 与 BC 之间的数量关系, 并证明.

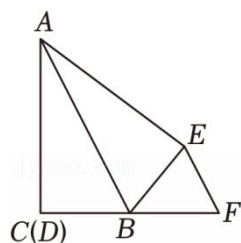


图1

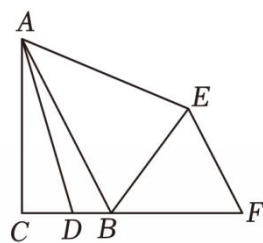


图2

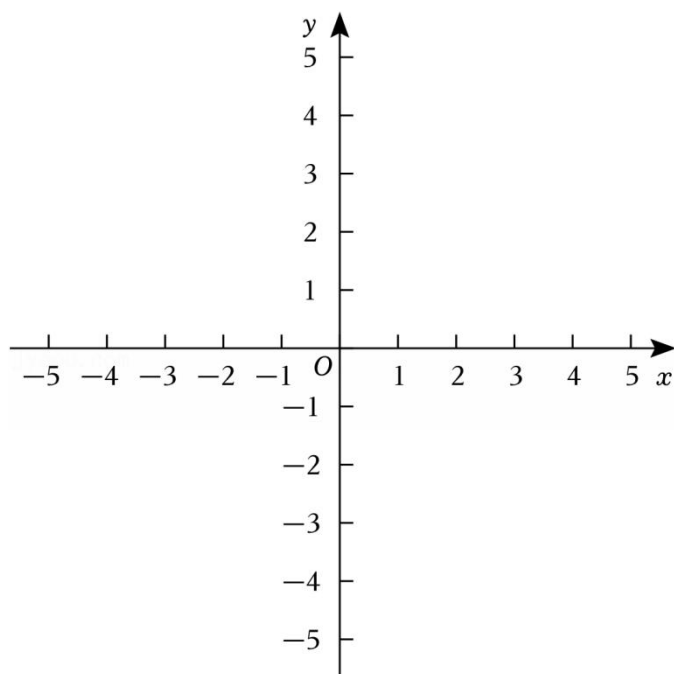


27. 对于平面直角坐标系 xOy 内的点 P 和图形 M , 给出如下定义: 如果点 P 绕原点 O 顺时针旋转 90° 得到点 P' , 点 P' 落在图形 M 上或图形 M 围成的区域内, 那么称点 P 是图形 M 关于原点 O 的“伴随点”. 已知点 $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(3, 2)$.

(1) 在点 $P_1(-2, 0)$, $P_2(-1, 1)$, $P_3(-1, 2)$ 中, 点_____是线段 AB 关于原点 O 的“伴随点”;

(2) 如果点 $D(m, 2)$ 是 $\triangle ABC$ 关于原点 O 的“伴随点”, 直接写出 m 的取值范围_____;

(3) 已知抛物线 $y = (x+1)^2 + n$ 的顶点坐标为 $(-1, n)$, 其关于原点对称的抛物线上存在 $\triangle ABC$ 关于原点 O 的“伴随点”, 直接写出 n 的最大值_____和 n 的最小值_____.





北京课改版九上数学月考卷（三）

参考答案与试题解析

一. 选择

1. **【分析】** 根据一元二次方程的定义进行判断即可.

【解答】 解: A、方程 $x(x+2)=x^2$ 展开化简为 $2x=0$, 不是一元二次方程, 不符合题意;

B、方程 $x^2+y+1=0$ 含有两个未知数, 不是一元二次方程, 不符合题意;

C、方程 $x^2 - \frac{1}{x} - 2 = 0$ 含有分式, 不是一元二次方程, 不符合题意;

D、方程 $(x-1)(x+2)=x$ 展开化简为 $x^2 - 2 = 0$, 是一元二次方程, 符合题意,

故选: D.

【点评】 本题考查的是一元二次方程的定义, 熟知只含有一个未知数, 并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫一元二次方程是解题的关键.

2. **【分析】** 方程整理为一般形式, 找出所求即可.

【解答】 解: 方程整理得: $2x^2+5x-6=0$,

则方程的二次项系数、一次项系数、常数项分别是 2, 5, -6,

故选: C.

【点评】 此题考查了一元二次方程的一般形式, 其一般形式为 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$).

3. **【分析】** 根据 $x^2 - 4x + 1 = 0$, 配方得 $(x-2)^2 = 3$ 进行作答即可.

【解答】 解: 原方程移项配方得: $x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$,

$(x-2)^2 = 3$,

故选: C.

【点评】 本题考查了配方法解一元二次方程. 熟练掌握配方法解一元二次方程是解题的关键.

4. **【分析】** 根据根的判别式的意义得到 $2^2 - 4 \times (-m) = 0$, 然后解方程即可.

【解答】 解: 根据题意得 $\Delta = 2^2 - 4 \times (-m) = 0$,

解得 $m = -1$.

故选: B.

【点评】 本题考查了根的判别式: 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实



数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程无实数根.

5. 【分析】根据“左加右减、上加下减”的原则进行解答即可.

【解答】解：将抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向下平移 2 个单位后，得到的抛物线的解析式是 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

故选：B.

【点评】本题考查的是二次函数的图象与几何变换，熟知函数图象平移的法则是解答此题的关键.

6. 【分析】先根据解析式确定抛物线的顶点坐标、对称轴，然后对图象进行讨论选择.

【解答】解： $\because a = 2 > 0$,

$\therefore$ 抛物线开口方向向上；

$\because$ 二次函数解析式为 $y = 2(x+2)^2 - 1$,

$\therefore$ 顶点坐标为 $(-2, -1)$ ，对称轴为直线 $x = -2$.

故选：C.

【点评】判断图象的大体位置根据：(1) 根据 a 的正负确定开口方向；(2) 根据顶点坐标或对称轴确定图象位于哪些象限.

7. 【分析】由表格可发现 $x^2 + 3x - 5$ 的值 -1 和 5 最接近 0 ，再看对应的 x 的值即可得到答案.

【解答】解：由表可以看出，当 x 取 1 与 2 之间的某个数时， $x^2 + 3x - 5 = 0$ ，即这个数是 $x^2 + 3x - 5 = 0$ 的一个根.

$x^2 + 3x - 5 = 0$ 的一个解 x 的取值范围为 1 和 2 之间.

故选：B.

【点评】本题考查了估算一元二次方程的近似解，正确估算是建立在对二次函数图象和一元二次方程关系正确理解的基础上的.

8. 【分析】由 $y = (x-1)^2 - 3$ 可得出开口方向、对称轴、增减性、最小值，据此判断即可.

【解答】解： $\because y = (x-1)^2 - 3$ 中 $a = 1 > 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向上，对称轴是直线 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, -3)$,

$\therefore$ 当 $x < 1$ 时， y 随 x 的增大而减小；当 $x = 1$ 时， y 有最小值 -3 ,

$\therefore$ ①②④ 3 个正确，

故选：C.

【点评】本题考查二次函数的图象和性质，二次函数图象与系数的关系，二次函数的最值，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.



二. 填空题

9. **【分析】**移项后, 提取公因式 x , 将原式化为两式相乘的形式 $x(x-3)=0$, 再根据“两式相乘值为 0, 这两式中至少有一式值为 0”来解题.

【解答】解: 原方程可化为 $x^2-3x=0$,

$$x(x-3)=0,$$

$$x_1=0, x_2=3.$$

故答案为: $x_1=0, x_2=3$.

【点评】本题考查了一元二次方程的解法, 熟知解一元二次方程的因式分解法是解题的关键.

10. **【分析】**一元二次方程的根就是一元二次方程的解, 就是能够使方程左右两边相等的未知数的值. 即用这个数代替未知数所得式子仍然成立.

【解答】解: 把 $x=1$ 代入方程 $ax^2+x-b=0$, 可得 $a+1-b=0$, 解得 $a-b=-1$.

【点评】本题考查的是一元二次方程的根即方程的解的定义.

11. **【分析】**把 $x=0$ 代入抛物线 $y=x^2+3$ 求出 y 值, 即可得到抛物线与 y 轴的交点坐标.

【解答】解: 由条件可得: $y=0^2+3=3$,

$\therefore$ 抛物线 $y=x^2+3$ 与 y 轴的交点坐标为 $(0, 3)$.

故答案为: $(0, 3)$.

【点评】本题考查二次函数图象上点的坐标特征, 解题关键是熟练掌握二次函数图象与坐标轴的交点的求解方法.

12. **【分析】**直接利用顶点式的特点可求顶点坐标.

【解答】解: 因为 $y=(x-1)^2+2$ 是抛物线的顶点式,

根据顶点式的坐标特点可知, 顶点坐标为 $(1, 2)$.

【点评】主要考查了求抛物线的对称轴和顶点坐标的方法.

13. **【分析】**观察点 $(-3, m)$ 和 $(5, m)$, 它们关于对称轴为直线 $x=h$ 对称, 据此即可作答.

【解答】解: $\because$ 抛物线 $y=(x-h)^2+4$ 经过点 $(-3, m)$ 和 $(5, m)$ 两点, 且 $(-3, m)$ 和 $(5, m)$ 两点的纵坐标相等,

$\therefore$ 点 $(-3, m)$ 和 $(5, m)$ 关于对称轴直线 $x=h$ 对称,

$$\text{即 } h = \frac{-3+5}{2} = 1.$$



故答案为：1.

【点评】 本题考查了二次函数的对称性以及对称轴为直线 $x=h$ ，掌握其相关知识点是解题的关键.

14. **【分析】** 由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 可得 $x_1 \cdot x_2 = 6$ ，根据 $S = \frac{1}{2}x_1 \cdot x_2$ 求值即可.

【解答】 解： $\because x^2 - 5x + 6 = 0$,

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{6}{1} = 6,$$

$\because$ 直角三角形的两条直角边的长恰好是方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两根，

$$\therefore S = \frac{1}{2}x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} \times 6 = 3.$$

故答案为：3.

【点评】 本题考查了一元二次方程的根与系数的关系. 解题的关键在于对知识的熟练掌握与灵活运用.

15. **【分析】** 先求出抛物线的对称轴和开口方向，然后根据二次函数对称性和增减性判断即可.

【解答】 解： $\because$ 抛物线 $y = 3(x - 1)^2 + k$ 的开口向上，对称轴是直线 $x = 1$ ，

$\therefore$ 当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而增大，

$\therefore C(-4, y_3)$ 关于称轴是直线 $x = 1$ 的对称点是 $(6, y_3)$ ，

$$\because 2 < 3 < 6,$$

$$\therefore y_1 < y_2 < y_3.$$

故答案为： $y_1 < y_2 < y_3$.

【点评】 本题考查了二次函数图象上点的坐标特征和二次函数的性质，能熟记二次函数的性质是解此题的关键.

16. **【分析】** 根据 2017 年无害化处理能力 $\times (1 + \text{增长率})^2 = 2019$ 年无害化处理能力建立方程.

【解答】 解：根据题意可以列方程为 $2.5(1+x)^2 = 3.2$ ，

故答案为： $2.5(1+x)^2 = 3.2$.

【点评】 本题考查了一元二次方程的应用，正确理解题意，找到等量关系是解题的关键.

三. 解答题

17. **【分析】** 先根据零指数幂，负整数指数幂的运算法则分别计算出各数，再算加减即可.

【解答】 解：原式 $= \frac{1}{2} - (2 - \sqrt{3}) + 2\sqrt{3} + 1$

$$= \frac{1}{2} - 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1$$



$$=-\frac{1}{2}+3\sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了实数的运算，零指数幂，负整数指数幂，掌握实数的运算法则是解题的关键.

18. **【分析】** (1) 先化为一般形式，再根据因式分解法解一元二次方程即可求解；

(2) 先化为一般形式，再根据公式法解一元二次方程即可求解；

(3) 先化为一般形式，再根据因式分解法解一元二次方程即可求解.

【解答】 解：(1) $x^2 - 4x = 5$,

$$\therefore x^2 - 4x - 5 = 0,$$

$$\therefore (x+1)(x-5) = 0,$$

$$\therefore x+1=0 \text{ 或 } x-5=0,$$

解得 $x_1 = -1$, $x_2 = 5$;

$$(2) 3x^2 - 1 = 4x,$$

$$\therefore 3x^2 - 4x - 1 = 0,$$

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 12 = 28,$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm 2\sqrt{7}}{6},$$

$$\text{解得 } x_1 = \frac{2+\sqrt{7}}{3}, x_2 = \frac{2-\sqrt{7}}{3};$$

$$(3) (x-1)^2 = 2(x-1),$$

$$\therefore (x-1)(x-1-2) = 0,$$

$$\therefore x-1=0 \text{ 或 } x-3=0,$$

解得 $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

【点评】 本题考查了解一元二次方程，熟练掌握解一元二次方程的因式分解法和公式法是解题的关键.

19. **【分析】** 首先把 m 代入已知方程中，然后利用整体代值的思想即可求解.

【解答】 解： $\because m$ 是方程 $x^2 - x - 2 = 0$ 的根，

$$\therefore m^2 - m - 2 = 0,$$

$$\therefore m^2 - m = 2,$$

$$\therefore m(m-1) + 5$$

$$= m^2 - m + 5$$



$$=2+5$$

$$=7.$$

【点评】此题主要考查了一元二次方程的解，解题的关键是利用整体代入的思想.

20. **【分析】**(1) 根据根的判别式即可求出答案.

(2) 求出方程的两根，根据题意列出方程即可求出答案.

【解答】(1) 证明： $\because$ 方程 $x^2 - (k+4)x + k+3 = 0$, $a=1$, $b=-(k+4)$, $c=k+3$,

$$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = [-(k+4)]^2 - 4 \times 1 \times (k+3) = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2 \geq 0,$$

$\therefore$ 无论 k 为何值，该方程总有两个实数根.

(2) 解：由求根公式，得 $x = \frac{(k+4) \pm (k+2)}{2}$.

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = k+3,$$

$\because$ 方程有一个根为负数，

$$\therefore k+3 < 0.$$

$$\therefore k < -3.$$

$\therefore k$ 的取值范围是 $k < -3$.

【点评】本题考查一元二次方程，解题的关键是熟练运用根的判别式以及方程的解法，本题属于中等题型.

21. **【分析】**根据抛物线的顶点为 $P(4, -1)$ ，设该抛物线的解析式为 $y = a(x-4)^2 - 1$ ，再把点 $A(0, 3)$ 代入，求得 a 的值，即可解答.

【解答】解：设 $y = a(x-4)^2 - 1$,

$\because$ 抛物线交 y 轴于点 $A(0, 3)$,

$$\therefore 3 = a \cdot (0-4)^2 - 1,$$

$$\text{解得 } a = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \text{抛物线的解析式为 } y = \frac{1}{4}(x-4)^2 - 1.$$

【点评】本题考查待定系数法求函数解析式，掌握待定系数法是解题的关键.

22. **【分析】**(1) 运用待定系数法，将点 $A(2, 4)$ 代入解析式，即可求解；

(2) 分别把点 $A(2, 4)$, $B(4, 4)$ 代入解析式，即可求解.

【解答】解：(1) 由条件可知 $4 = a \cdot 2^2$,

$$\text{解得 } a = 1,$$



∴该抛物线的解析式为 $y=x^2$.

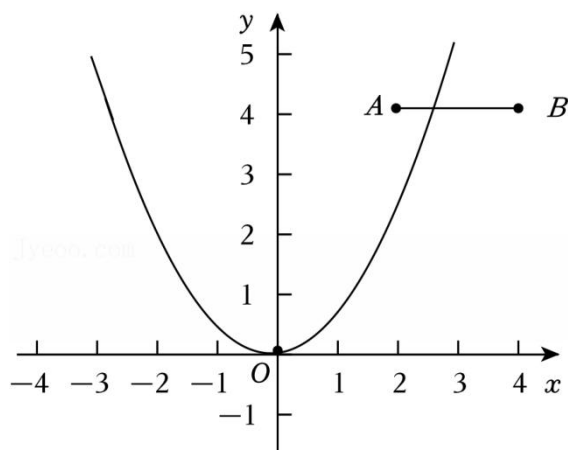
(2) 当点 $A(2, 4)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上时, $4=a \cdot 2^2$,

解得 $a=1$;

当点 $B(4, 4)$ 在抛物线 $y=ax^2$ 上时, $4=a \cdot 4^2$,

解得 $a=\frac{1}{4}$,

∴抛物线 $y=ax^2$ 与线段 AB 有一个公共点时, $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$.



【点评】 本题考查待定系数法求解析式, 抛物线与线段的交点. 熟练掌握该知识点是关键.

23. **【分析】** 设银边的宽为 $x\text{cm}$, 根据银边的面积和照片的面积相等, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其正值即可得出结论.

【解答】 解: 设银边的宽为 $x\text{cm}$,

依题意, 得: $(12+2x)(8+2x) - 12 \times 8 = 12 \times 8$,

整理, 得: $x^2+10x-24=0$,

解得: $x_1=2, x_2=-12$ (不合题意, 舍去).

答: 银边的宽应该是 2cm .

【点评】 本题考查了一元二次方程的应用, 找准等量关系, 正确列出一元二次方程是解题的关键.

24. **【分析】** (1) $y=(x+1)^2-4$ 顶点坐标为 $(-1, -4)$, 再由 $(x+1)^2-4=0$ 可求出与 x 轴的两个交点的横坐标;

(2) 抛物线的对称轴是直线 $x=-1$, 顶点坐标为 $(-1, -4)$, 由 (1) 知 x 轴的两个交点, 即可画出抛物线图象;

(3) 抛物线上的点 $P(m, n)$, $n<0$, 即点 P 在 x 轴下方, 观察图象即可知 m 的范围; 当



$-2 < x < 2$ 时, 由图象可知 y 的取值范围.

【解答】解: (1) $y = (x+1)^2 - 4$ 顶点坐标为 $(-1, -4)$,

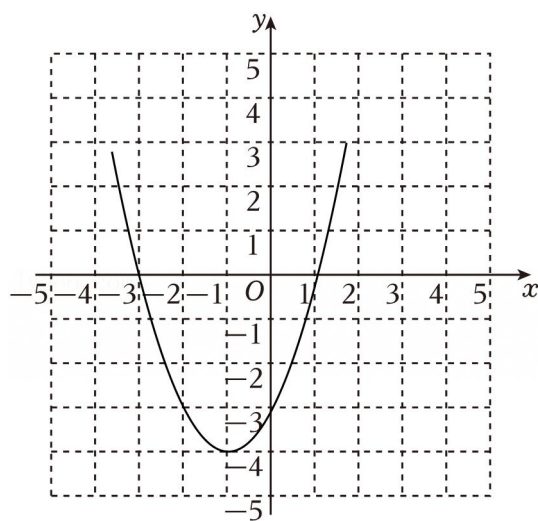
令 $y=0$, 即 $(x+1)^2 - 4 = 0$,

解得 $x_1 = -3, x_2 = 1$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的两个交点坐标为 $(-3, 0), (1, 0)$.

故答案为: $(-1, -4); (-3, 0), (1, 0)$.

(2) 该抛物线如图所示:



(3) $\because$ 抛物线上的点 $P(m, n), n < 0$, 即点 P 在 x 轴下方,

$\therefore$ 从图象上得出 $-3 < m < 1$,

$\because$ 当 $-2 < x < 2$ 时, 对称轴是直线 $x = -1$ 在 $-2 < x < 2$ 的范围之内,

$\therefore$ 当 $-2 < x < 2$ 时, 当 $x=2, y$ 的值为 5, $(2, 5)$ 为这段图象的最高点, 但图象不包括这个点,

$\therefore$ 当 $-2 < x < 2$ 时, 当时 $x = -1, y$ 的最小值为 $-4, (-1, -4)$ 为这段图象的最低点,

$\therefore y < 5$,

$\therefore$ 当 $-2 < x < 2$ 时, y 的取值范围为 $-4 \leq y < 5$.

故答案为: $-3 < m < 1; -4 \leq y < 5$.

【点评】 本题考查二次函数图象与 x 轴的交点, 顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$ 的图象和性质, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

25. **【分析】** (1) 点 $(1, 0)$ 代入解析式即可得出结果;

(2) 利用点 E 在直线上, 点 F 在抛物线上, $EF \perp x$ 轴, 点 E 、点 F 的横坐标相同, 可求出或表示点 E 、点 F 的坐标, 即可求出或表示出 EF 的长.



【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y=ax^2+c$ ($a>0$) 经过点 $(1, 0)$,

$$\therefore a+c=0,$$

$$\therefore c=-a;$$

(2) 由 (1) 得抛物线为 $y=ax^2-a$,

$$\textcircled{1} \because a=1,$$

$\therefore$ 抛物线为 $y=x^2-1$, 直线解析式为 $y=x$,

$\because m=1$, 代入 $y=x$ 得 $n=1$,

$\therefore$ 点 E 坐标为 $(1, 1)$,

$\because$ 将 $m=1$, 代入 $y=x^2-1$ 得 $y=1-1=0$,

$\therefore$ 点 F 坐标为 $(1, 0)$,

$$\therefore EF=1-0=1;$$

$\textcircled{2}$ 将 $m=2$ 分别代入 $y=axy=ax^2-a$,

得到点 E 坐标为 $(2, 2a)$, 点 F 坐标为 $(2, 3a)$,

$$\therefore EF=4,$$

$$\therefore 3a-2a=4,$$

解得 $a=4$.

【点评】 本题考查待定系数法求二次函数解析式, 二次函数图象上点的坐标特征, 一次函数图象上点的坐标特征, 图象上点的坐标满足解析式是解题的关键.

26. **【分析】** (1) 由 $EF \parallel AB$ 得到 $\angle F = \angle ABC = \alpha$. 由三角形的内角和定理与旋转的性质证明 $\angle CAB = \angle EAB = 90^\circ - \alpha$, $AC = AE$, 从而得到 $\triangle ACB \cong \triangle AEB$ (SAS), 进而有 $\angle ABE = \angle ABC = \alpha$, 再由 $EF \parallel AB$ 得到 $\angle BEF = \angle ABE = \alpha$, 从而 $\angle BEF = \angle F$, 因此根据等腰三角形的判定即可解答;

(2) 延长 BC 到点 H , 使 $CH = CB$, 由 $EF \parallel AB$ 得到 $\angle F = \angle ABC = \alpha$. 由垂直平分线的性质得到 $AH = AB$, 进而根据等腰三角形的“三线合一”得到 $\angle HAB = 2\angle HAC = 180^\circ - 2\alpha = \angle DAE$, 从而 $\angle HAD = \angle BAE$, 即可证明 $\triangle HAD \cong \triangle BAE$ (SAS), 得到 $HD = BE$, $\angle ABE = \angle H = \alpha$. 证明 $\angle BEF = \angle F$ 得到 $BF = BE = DH$, 从而 $DF = BH = 2BC$.

【解答】 (1) 证明: $\because EF \parallel AB$,

$$\therefore \angle F = \angle ABC = \alpha,$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ,$$



$$\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \alpha,$$

由旋转可得 $AC = AE$, $\angle CAE = 180^\circ - 2\alpha$,

$$\therefore \angle EAB = \angle CAE - \angle CAB = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle CAB = \angle EAB,$$

$$\therefore AB = AB,$$

$$\therefore \triangle ACB \cong \triangle AEB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ABE = \angle ABC = \alpha,$$

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle ABE = \alpha,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle F,$$

$$\therefore BF = BE.$$

(2) 解: $DF = 2BC$, 证明如下:

延长 BC 到点 H , 使 $CH = CB$,

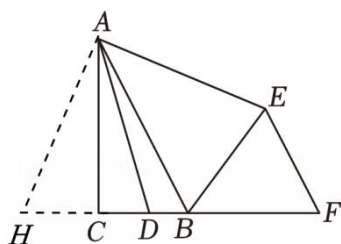


图2

$$\therefore EF \parallel AB,$$

$$\therefore \angle F = \angle ABC = \alpha,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAB = 90^\circ - \angle ACB = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore CH = CB,$$

$\therefore AC$ 是 BH 的垂直平分线,

$$\therefore AH = AB,$$

$$\therefore \angle HAC = \angle BAC = 90^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle HAB = 2\angle HAC = 180^\circ - 2\alpha,$$

$$\therefore \angle HAB = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle HAB - \angle DAB = \angle DAE - \angle DAB,$$

即 $\angle HAD = \angle BAE$,



$\because$ 由旋转有 $AD=AE$

在 $\triangle HAD$ 与 $\triangle BAE$ 中,

$$\begin{cases} AH = AB \\ \angle HAD = \angle BAE, \\ AD = AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle HAD \cong \triangle BAE$ (SAS),

$\therefore HD=BE$,

$\angle ABE = \angle H = \alpha$,

$\therefore EF \parallel AB$,

$\therefore \angle BEF = \angle ABE = \alpha$,

$\therefore \angle BEF = \angle F$,

$\therefore BF=BE=DH$,

$\therefore BH=DH+BD=BF+BD=DF$,

$\therefore BH=2BC$,

$\therefore DF=2BC$.

【点评】 本题是三角形的综合题, 考查旋转的性质, 全等三角形的判定及性质, 等腰三角形的判定及性质, 熟练掌握旋转的性质, 全等三角形判定及平行线性质的性质是解题的关键.

27. **【分析】** (1) 根据“伴随点”的定义, 画出每个点绕点 O 旋转后的对应点, 进行判断即可;

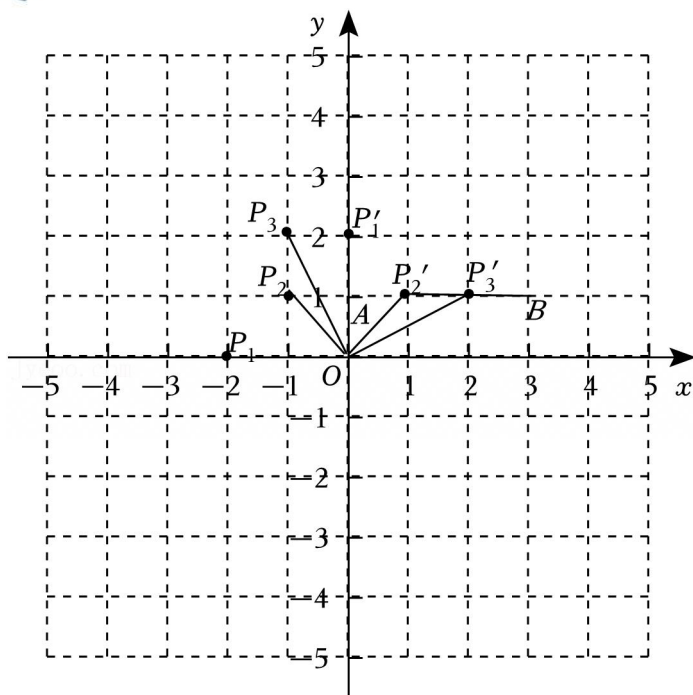
(2) 过点 D 作 $DP \perp x$ 轴于点 P , 过点 D' 作 $D'Q \perp x$ 轴于点 Q , 证明 $\triangle DPO \cong \triangle OQD'$, 求出 D' 的坐标, 再求出点 D' 在线段 AB 上和在线段 AC 上时, m 的值, 即可得出结论;

(3) 根据顶点坐标, 写出抛物线的顶点式, 进而得到其关于原点对称的抛物线的解析式, 将 $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C'$, 根据抛物线上存在 $\triangle ABC$ 关于原点 O 的“伴随点”, 得到当抛物线过点 A' 时 n 有最大值, 当抛物线过点 C' 时 n 有最小值, 即可得解.

【解答】 解: (1) $\because B(3, 1), A(1, 1)$,

$\therefore AB \parallel x$ 轴,

如图所示, 点 $P_1(-2, 0), P_2(-1, 1), P_3(-1, 2)$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到的对应点分别为: $P_1'(0, 2), P_2'(1, 1), P_3'(2, 1)$,



其中点 P_2' (1, 1), P_3' (2, 1), 在线段 AB 上,

$\therefore P_2$ 和 P_3 是线段 AB 关于原点 O 的“伴随点”,

故答案为: P_2 和 P_3 ;

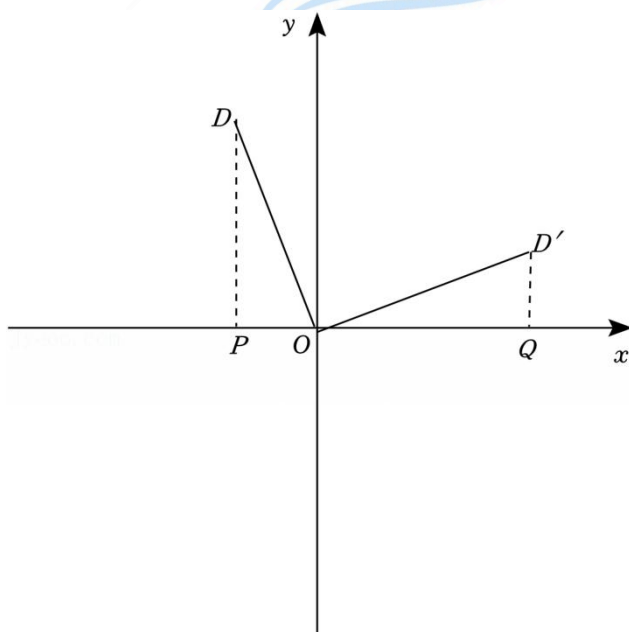
(2) $\because B(3, 1), C(3, 2), A(1, 1)$,

$\therefore \triangle ABC$ 在第一象限,

$\because$ 点 $D(m, 2)$ 是 $\triangle ABC$ 关于原点 O 的“伴随点”,

$\therefore$ 点 D 在第二象限,

过点 D' 作 $D'Q \perp x$ 轴于点 Q , 过点 D 作 $DP \perp x$ 轴于点 P ,





则： $\angle DPO = \angle D' QO = 90^\circ$,
 $\because OD$ 绕点 O 顺时针旋转 90° 得到 OD' ,
 $\therefore \angle DOD' = 90^\circ$, $OD = OD'$,
 $\therefore \angle DOP = \angle OD' Q = 90^\circ - \angle D' OQ$,
 $\therefore \triangle DPO \cong \triangle OQD'$ (AAS),
 $\therefore D' Q = OP$, $OQ = DP$,
 $\because D(m, 2)$,
 $\therefore D' Q = OP = 2$, $OQ = DP = |m|$,
 $\because \triangle ABC$ 在第一象限,
 $\therefore D'(2, -m)$,

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则} \begin{cases} k + b = 1 \\ 3k + b = 2 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

当 D' 在 AC 上时, m 值最小, 即 $-m = 1 + \frac{1}{2}$,

$$\text{解得 } m = -\frac{3}{2}$$

当 D' 在 AB 上时, m 值最大, 即 $-m = 1$,

$$\text{解得 } m = -1$$

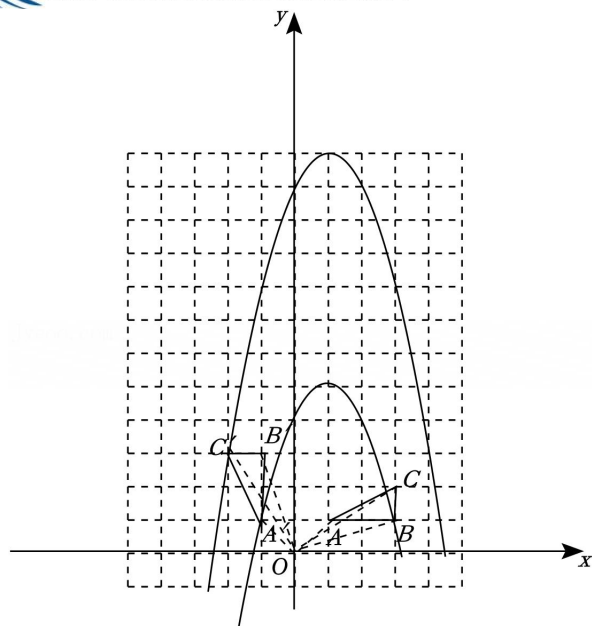
$$\therefore -\frac{3}{2} \leq m \leq -1$$

故答案为: $-\frac{3}{2} \leq m \leq -1$.

(3) $\because$ 抛物线的解析式为 $y = (x+1)^2 + n$,

$\therefore$ 其关于原点对称的抛物线解析式为 $y = -(x-1)^2 - n$,

如图, $\triangle ABC$ 绕点 O 逆时针旋转 90° 得到 $\triangle A' B' C'$, 其中 $B'(-1, 3)$, $C'(-2, 3)$, $A'(-1, 1)$,



∵ 抛物线上存在 $\triangle ABC$ 关于原点 O 的“伴随点”，

∴ 当 $y = -(x-1)^2 - n$ 过 A' 时， n 的值最大，

把 $A'(-1, 1)$ 代入 $y = -(x-1)^2 - n$ 得 $1 = -(-1-1)^2 - n$ ，

解得： $n = -5$ ，

∴ n 的最大值为 -5 ，

当 $y = -(x-1)^2 - n$ 过 C' 时， n 的值最小，

把 $C'(-2, 3)$ 代入 $y = -(x-1)^2 - n$ 得 $3 = -(-2-1)^2 - n$ ，

解得： $n = -12$ ，

∴ n 的最小值为 -12 。

故答案为： -5 ； -12 。

【点评】 本题是二次函数的综合题，考查旋转的性质，一次函数和二次函数的综合应用，全等三角形的性质和判定，解题的关键是理解并掌握“伴随点”的定义，利用数形结合的思想进行求解。