



《相似三角形》单元测试卷

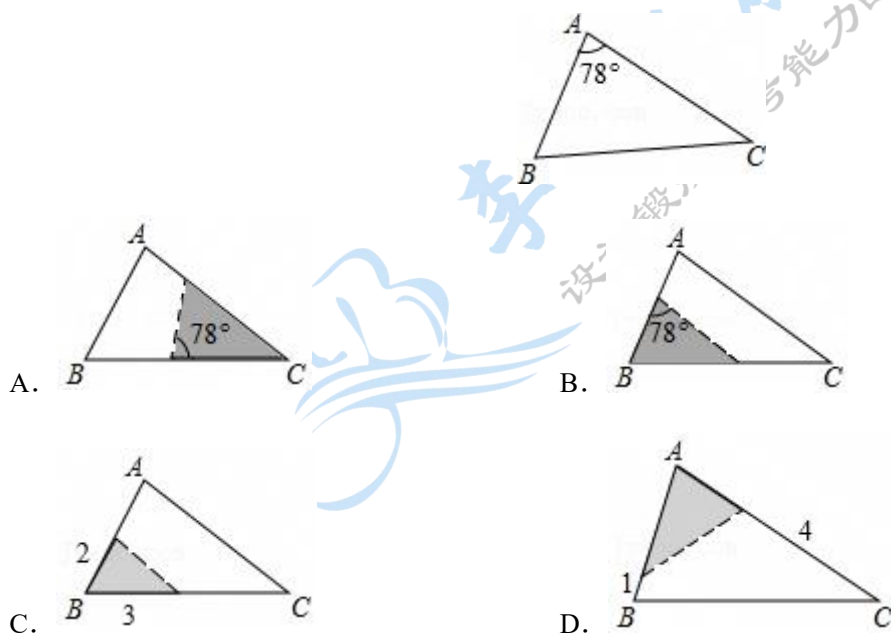
1. 下列四组图形中，一定相似的是（ ）

- A. 正方形与矩形 B. 正方形与菱形
 C. 菱形与菱形 D. 正五边形与正五边形

2. $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的相似比为 1:4，则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 的面积比为（ ）

- A. 1:2 B. 1:3 C. 1:4 D. 1:16

3.) 如图， $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 78^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = 6$ 。将 $\triangle ABC$ 沿图示中的虚线剪开，剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是（ ）



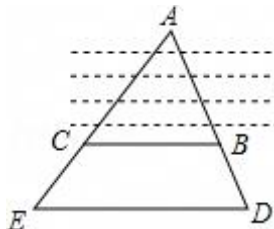
4. 已知两个直角三角形的三边长分别为 3, 4, m 和 6, 8, n ，且这两个直角三角形不相似，则 $m+n$ 的值为（ ）

- A. $10 + \sqrt{7}$ 或 $5 + 2\sqrt{7}$ B. 15
 C. $10 + \sqrt{7}$ D. $15 + 3\sqrt{7}$



5. 如图，在河两岸分别有 A 、 B 两村，现测得 A 、 B 、 D 在一条直线上， A 、 C 、 E 在一条直线上， $BC \parallel DE$ ， $DE=90$ 米， $BC=70$ 米， $BD=20$ 米，则 A 、 B 两村间的距离为（ ）

- A. 50 米
B. 60 米
C. 70 米
D. 80 米

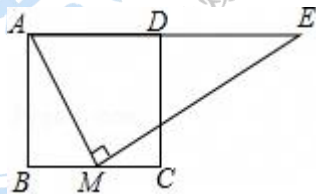


6. 在平面直角坐标系中，点 $P(m, n)$ 是线段 AB 上一点，以原点 O 为位似中心把 $\triangle AOB$ 放大到原来的两倍，则点 P 的对应点的坐标为（ ）

- A. $(2m, 2n)$
B. $(2m, 2n)$ 或 $(-2m, -2n)$
C. $(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n)$
D. $(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}n)$ 或 $(-\frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}n)$

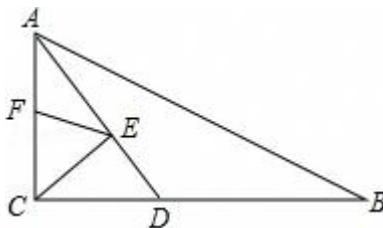
7. 如图，正方形 $ABCD$ 中， M 为 BC 上一点， $ME \perp AM$ ， ME 交 AD 的延长线于点 E 。若 $AB=12$ ， $BM=5$ ，则 DE 的长为（ ）

- A. 18
B. $\frac{109}{5}$
C. $\frac{96}{5}$
D. $\frac{25}{3}$



8. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=6$ ， $BC=8$ ， AD 平分 $\angle CAB$ 交 BC 于 D 点， E 、 F 分别是 AD 、 AC 上的动点，则 $CE+EF$ 的最小值为（ ）

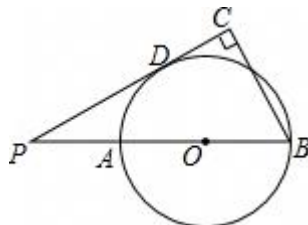
- A. $\frac{40}{3}$
B. $\frac{15}{4}$
C. $\frac{24}{5}$
D. 6





9. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 P 在 BA 的延长线上, PD 与 $\odot O$ 相切于点 D , 过点 B 作 PD 的垂线交 PD 的延长线于点 C , 若 $\odot O$ 的半径为 4, $BC=6$, 则 PA 的长为 ()

- A. 4
B. $2\sqrt{3}$
C. 3
D. 2.5

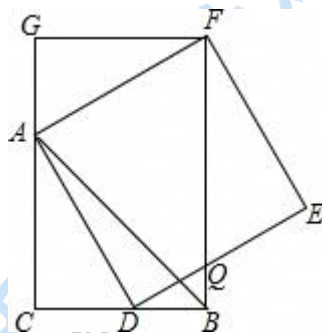


10. 如图, $CB=CA$, $\angle ACB=90^\circ$, 点 D 在边 BC 上 (与 B 、 C 不重合), 四边形 $ADEF$ 为正方形, 过点 F 作 $FG \perp CA$, 交 CA 的延长线于点 G , 连接 FB , 交 DE 于点 Q , 给出以下结论:

- ① $AC=FG$; ② $S_{\triangle FAB} : S_{\text{四边形} CBF G} = 1 : 2$; ③ $\angle ABC = \angle ABF$; ④ $AD^2 = FQ \cdot AC$,

其中正确的结论的个数是 ()

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4



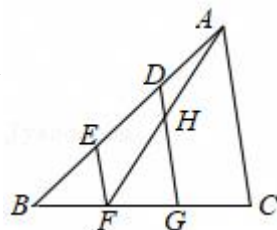
二. 填空题

11. 在比例尺为 1: 4000000 的地图上, 两城市间的图上距离为 3cm, 则这两城市间的实际距离为 km .

12. 如果 $\frac{x}{y} = \frac{2}{5}$, 那么 $\frac{y-x}{y+x} =$ _____.

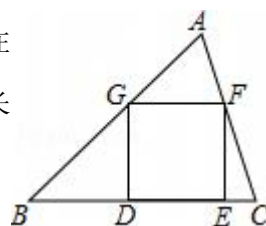
13. 在平面直角坐标系中, 点 A , B 的坐标分别是 $A(4, 2)$, $B(5, 0)$, 以点 O 为位似中心, 相似比为 $\frac{1}{2}$, 把 $\triangle ABO$ 缩小, 得到 $\triangle A_1B_1O$, 则点 A 的对应点 A_1 的坐标为 _____.

14. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 为边 AB 的三等分点, $EF \parallel DG \parallel AC$, H 为 AF 与 DG 的交点. 若 $AC=6$, 则 $DH=$ _____.

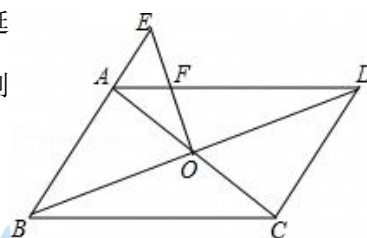




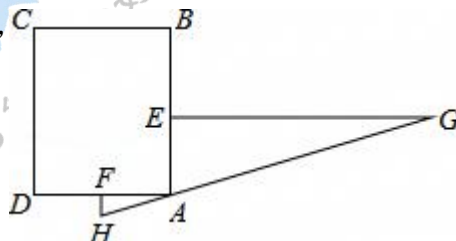
15. 如图, 已知正方形 $DEFG$ 的顶点 D 、 E 在 $\triangle ABC$ 的边 BC 上, 顶点 G 、 F 分别在边 AB 、 AC 上. 如果 $BC=4$, $\triangle ABC$ 的面积是 6, 那么这个正方形的边长是_____.



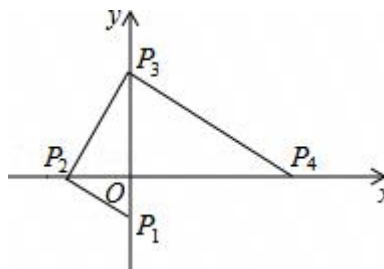
16. (3分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 在 BA 的延长线上取一点 E , 连接 OE 交 AD 于点 F . 若 $CD=5$, $BC=8$, $AE=2$, 则 $AF=$ _____.



17. “今有邑, 东西七里, 南北九里, 各开中门, 出东门一十五里有木, 问: 出南门几何步而见木?” 这段话摘自《九章算术》, 意思是说: 如图, 矩形城池 $ABCD$, 东边城墙 AB 长 9 里, 南边城墙 AD 长 7 里, 东门点 E 、南门点 F 分别是 AB , AD 的中点, $EG \perp AB$, $FH \perp AD$, $EG=15$ 里, HG 经过 A 点, 则 $FH=$ _____里.



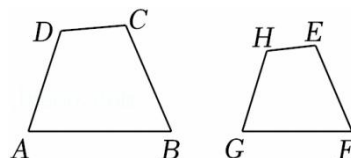
18. 如图, 点 P_1 , P_2 , P_3 , P_4 均在坐标轴上, 且 $P_1P_2 \perp P_2P_3$, $P_2P_3 \perp P_3P_4$, 若点 P_1 , P_2 的坐标分别为 $(0, -1)$, $(-2, 0)$, 则点 P_4 的坐标为_____.



三. 解答题

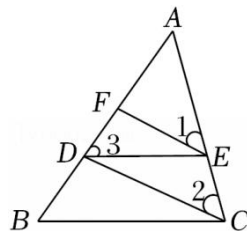
19. 如图, 四边形 $ABCD \sim$ 四边形 $GFEH$, 且 $\angle A = \angle G = 70^\circ$, $\angle B = 55^\circ$, $\angle E = 120^\circ$, $DC = 20$, $HE = 15$, $HG = 21$.

- (1) 写出它们相等的角及对应边的比例式;
- (2) 求 $\angle D$, $\angle F$ 的大小和 AD 的长.





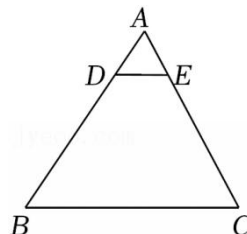
20. 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $DE \parallel BC$, $EF \parallel CD$, $AF=4$, $AB=6$. 求 AD 的长.



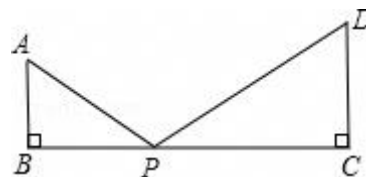
21. 如图, 点 D , E 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB , AC 上的点, 且 $DE \parallel BC$, $AD:BD=1:3$.

(1) 求证: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$;

(2) 若 $DE=2$, 求 BC 的长.



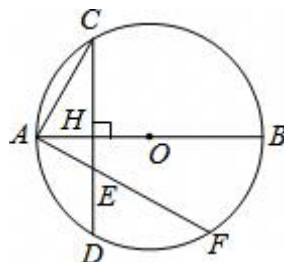
22. 如图所示, 已知 $AB \perp BC$ 于 B , $CD \perp BC$ 于 C , $AB=4$, $CD=6$, $BC=14$, P 为 BC 上一点, 试问 BP 为何值时, $\triangle ABP$ 与 $\triangle PCD$ 相似?



23. 如图, 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 $CD \perp AB$, 垂足为 H .

(1) 求证: $AH \cdot AB = AC^2$;

(2) 若过 A 的直线与弦 CD (不含端点) 相交于点 E , 与 $\odot O$ 相交于点 F , 求证: $AE \cdot AF = AC^2$.



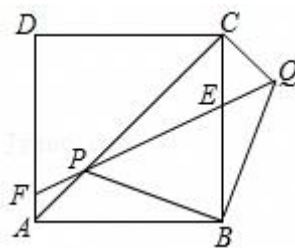


24. 边长为 $2\sqrt{2}$ 的正方形 $ABCD$ 中, P 是对角线 AC 上的一个动点 (点 P 与 A 、 C 不重合), 连接 BP , 将 BP 绕点 B 顺时针旋转 90° 到 BQ , 连接 QP , QP 与 BC 交于点 E , QP 延长线与 AD (或 AD 延长线) 交于点 F .

(1) 连接 CQ , 证明: $CQ=AP$;

(2) 设 $AP=x$, $CE=y$, 试写出 y 关于 x 的函数关系式, 并求当 x 为何值时, $CE=\frac{3}{8}BC$;

(3) 猜想 PF 与 EQ 的数量关系, 并证明你的结论.

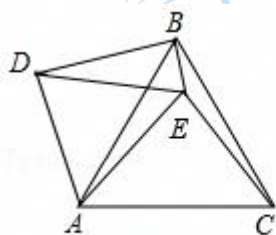


25. 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 中, $BA=BC$, $DA=DE$. 且 $\angle ABC=\angle ADE=\alpha$, 点 E 在 $\triangle ABC$ 的内部, 连接 EC , EB 和 BD , 并且 $\angle ACE+\angle ABE=90^\circ$.

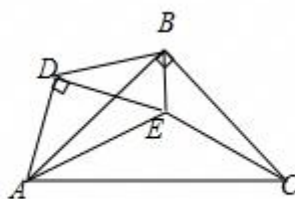
(1) 如图①, 当 $\alpha=60^\circ$ 时, 线段 BD 与 CE 的数量关系为_____, 线段 EA , EB , EC 的数量关系为_____;

(2) 如图②, 当 $\alpha=90^\circ$ 时, 请写出线段 EA , EB , EC 的数量关系, 并说明理由;

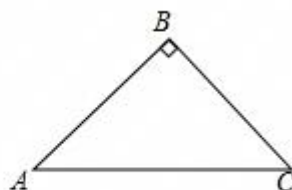
(3) 在 (2) 的条件下, 当点 E 在线段 CD 上时, 若 $BC=2\sqrt{5}$, 请直接写出 $\triangle BDE$ 的面积.



图①



图②



备用图



《相似三角形》单元测试卷

参考答案与试题解析

一、选择题

1. **【分析】**根据相似图形的定义和图形的性质对每一项进行分析，即可得出一定相似的图形.

【解答】解： A 、正方形与矩形，对应角相等，对应边不一定成比例，故不符合题意；

B 、正方形与菱形，对应边成比例，对应角不一定相等，不符合相似的定义，故不符合题意；

C 、菱形与菱形，对应边比值相等，但是对应角不一定相等，故不符合题意；

D 、正五边形与正五边形，对应角相等，对应边一定成比例，符合相似的定义，故符合题意.

故选： D .

【点评】本题考查了相似形的定义，熟悉各种图形的性质和相似图形的定义是解题的关键.

2. **【分析】**根据相似三角形的面积的比等于相似比的平方即可解决问题；

【解答】解： $\because \triangle ABC \sim \triangle DEF$ ，且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似比为 $1:4$ ，

$$\therefore \triangle ABC \text{ 与 } \triangle DEF \text{ 的面积比} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

故选： D .

【点评】本题考查的是相似三角形的性质，熟知相似三角形的面积的比等于相似比的平方是解答此题的关键.

3. **【分析】**根据相似三角形的判定定理对各选项进行逐一判定即可.

【解答】解： A 、阴影部分的三角形与原三角形有两个角相等，故两三角形相似，故本选项错误；

B 、阴影部分的三角形与原三角形有两个角相等，故两三角形相似，故本选项错误；

C 、两三角形的对应边不成比例，故两三角形不相似，故本选项正确；

D 、两三角形对应边成比例 $(4-1):6=(6-4):4$ 且夹角相等，故两三角形相似，故本选项错误.

故选： C .

【点评】本题考查的是相似三角形的判定，熟知相似三角形的判定定理是解答此题的关键.

4. **【分析】**直接利用相似三角形的性质结合勾股定理分别得出符合题意的答案.

【解答】解：当 $3, 4$ 为直角边， $6, 8$ 也为直角边时，此时两三角形相似，不合题意；

当三边分别为 $3, 4, \sqrt{7}$ ，和 $6, 8, 2\sqrt{7}$ ，此时两三角形相似，不合题意舍去

当 $3, 4$ 为直角边， $m=5$ ；则 8 为另一三角形的斜边，其直角边为： $\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$ ，

故 $m+n=5+2\sqrt{7}$ ；



当 6, 8 为直角边, $n=10$; 则 4 为另一三角形的斜边, 其直角边为: $\sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$,

故 $m+n=10+\sqrt{7}$;

故选: A.

【点评】此题主要考查了相似三角形的性质, 正确分类讨论是解题关键.

5. 【分析】根据相似三角形的判定定理得到 $\triangle ABC \sim \triangle AED$, 根据相似三角形的性质得到比例式, 代入计算即可.

【解答】解: $\because BC \parallel DE$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle AED$,

$$\therefore \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}, \text{ 即 } \frac{AB}{AB+20} = \frac{70}{90},$$

解得, $AB=70$,

故选: C.

【点评】本题考查的是相似三角形的应用, 掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

6. 【分析】根据位似变换的性质计算即可.

【解答】解: 点 $P(m, n)$ 是线段 AB 上一点, 以原点 O 为位似中心把 $\triangle AOB$ 放大到原来的两倍, 则点 P 的对应点的坐标为 $(m \times 2, n \times 2)$ 或 $(m \times (-2), n \times (-2))$, 即 $(2m, 2n)$ 或 $(-2m, -2n)$, 故选: B.

【点评】本题考查的是位似变换、坐标与图形的性质, 在平面直角坐标系中, 如果位似变换是以原点为位似中心, 相似比为 k , 那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$.

7. 【分析】先根据题意得出 $\triangle ABM \sim \triangle MCG$, 故可得出 CG 的长, 再求出 DG 的长, 根据 $\triangle MCG \sim \triangle EDG$ 即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形, $AB=12$, $BM=5$,

$$\therefore MC=12-5=7.$$

$\because ME \perp AM$,

$$\therefore \angle AME=90^\circ,$$

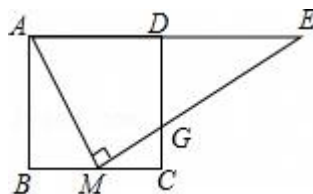
$$\therefore \angle AMB + \angle CMG = 90^\circ.$$

$$\because \angle AMB + \angle BAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle CMG, \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle MCG,$$

$$\therefore \frac{AB}{MC} = \frac{BM}{CG}, \text{ 即 } \frac{12}{7} = \frac{5}{CG}, \text{ 解得 } CG = \frac{35}{12}.$$





$$\therefore DG = 12 - \frac{35}{12} = \frac{109}{12}.$$

$$\because AE \parallel BC,$$

$$\therefore \angle E = \angle CMG, \angle EDG = \angle C,$$

$$\therefore \triangle MCG \sim \triangle EDG,$$

$$\therefore \frac{MC}{DE} = \frac{CG}{DG}, \text{ 即 } \frac{7}{DE} = \frac{\frac{35}{12}}{\frac{109}{12}}, \text{ 解得 } DE = \frac{109}{5}.$$

故选: B.

【点评】本题考查的是相似三角形的判定与性质, 熟知相似三角形的对应边成比例是解答此题的关键.

8. 【分析】如图所示: 在 AB 上取点 F' , 使 $AF' = AF$, 过点 C 作 $CH \perp AB$, 垂足为 H . 因为 $EF + CE = EF' + EC$, 推出当 C, E, F' 共线, 且点 F' 与 H 重合时, $FE + EC$ 的值最小.

【解答】解: 如图所示: 在 AB 上取点 F' , 使 $AF' = AF$, 过点 C 作 $CH \perp AB$, 垂足为 H .

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 依据勾股定理可知 $BA = 10$.

$$CH = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{24}{5},$$

$$\because EF + CE = EF' + EC,$$

$$\therefore \text{当 } C, E, F' \text{ 共线, 且点 } F' \text{ 与 } H \text{ 重合时, } FE + EC \text{ 的值最小, 最小值为 } \frac{24}{5}$$

故选: C.

【点评】本题主要考查的是轴对称的性质、勾股定理的应用、垂线段最短等知识, 解题的关键是学利用对称, 解决最短问题.

9. 【分析】直接利用切线的性质得出 $\angle PDO = 90^\circ$, 再利用相似三角形的判定与性质分析得出答案.

【解答】解: 连接 DO ,

$$\because PD \text{ 与 } \odot O \text{ 相切于点 } D,$$

$$\therefore \angle PDO = 90^\circ,$$

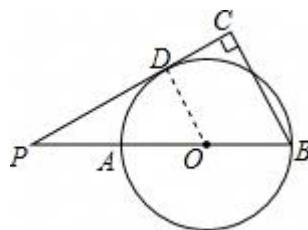
$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore DO \parallel BC,$$

$$\therefore \triangle PDO \sim \triangle PCB,$$

$$\therefore \frac{DO}{BC} = \frac{PO}{PB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\text{设 } PA = x, \text{ 则 } \frac{x+4}{x+8} = \frac{2}{3},$$





解得： $x=4$ ，

故 $PA=4$ 。

故选：A。

【点评】此题主要考查了切线的性质以及相似三角形的判定与性质，正确得出 $\triangle PDO \sim \triangle PCB$ 是解题关键。

10. 【分析】由正方形的性质得出 $\angle FAD=90^\circ$ ， $AD=AF=EF$ ，证出 $\angle CAD=\angle AFG$ ，由 AAS 证明 $\triangle FGA \cong \triangle ACD$ ，得出 $AC=FG$ ，①正确；

证明四边形 $CBFG$ 是矩形，得出 $S_{\triangle FAB} = \frac{1}{2}FB \cdot FG = \frac{1}{2}S_{\text{四边形 } CBFG}$ ，②正确；

由等腰直角三角形的性质和矩形的性质得出 $\angle ABC=\angle ABF=45^\circ$ ，③正确；

证出 $\triangle ACD \sim \triangle FEQ$ ，得出对应边成比例，得出 $AD \cdot FE = AD^2 = FQ \cdot AC$ ，④正确。

【解答】解：∵ 四边形 $ADEF$ 为正方形，

∴ $\angle FAD=90^\circ$ ， $AD=AF=EF$ ，

∴ $\angle CAD+\angle FAG=90^\circ$ ，

∵ $FG \perp CA$ ，

∴ $\angle GAF+\angle AFG=90^\circ$ ，

∴ $\angle CAD=\angle AFG$ ，

在 $\triangle FGA$ 和 $\triangle ACD$ 中， $\begin{cases} \angle G=\angle C \\ \angle AFG=\angle CAD \\ AF=AD \end{cases}$ ，

∴ $\triangle FGA \cong \triangle ACD$ (AAS)，

∴ $AC=FG$ ，①正确；

∵ $BC=AC$ ，

∴ $FG=BC$ ，

∵ $\angle ACB=90^\circ$ ， $FG \perp CA$ ，

∴ $FG \parallel BC$ ，

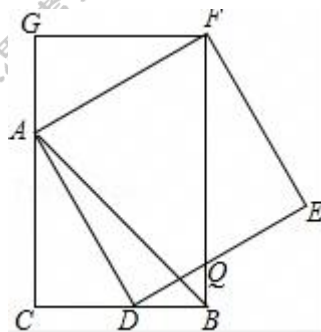
∴ 四边形 $CBFG$ 是矩形，

∴ $\angle CBF=90^\circ$ ， $S_{\triangle FAB} = \frac{1}{2}FB \cdot FG = \frac{1}{2}S_{\text{四边形 } CBFG}$ ，②正确；

∵ $CA=CB$ ， $\angle C=\angle CBF=90^\circ$ ，

∴ $\angle ABC=\angle ABF=45^\circ$ ，③正确；

∵ 四边形 $ADEF$ 为正方形，





$$\therefore \angle ADE = \angle QBD = \angle E = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC + \angle QDB = 90^\circ,$$

$$\because \angle QDB + \angle DQB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FQE = \angle DQB = \angle ADC,$$

$$\because \angle E = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle FEQ,$$

$$\therefore AC: AD = FE: FQ,$$

$$\therefore AD \cdot FE = AD^2 = FQ \cdot AC, \text{ ④正确;}$$

或: AD^2 表示正方形的面积; 连接 AQ , $FQ \times AC = FQ \times BC = FQ \times GF = \triangle AFQ$ 面积的 2 倍 (FQ 为底, GF 为高) $= \triangle AFQ$ 面积的 2 倍 (AF 为底, AD 为高) $=$ 正方形的面积, 所以结论 4 是对的;

故选: D.

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、正方形的性质、矩形的判定与性质、等腰直角三角形的性质; 熟练掌握正方形的性质, 证明三角形全等和三角形相似是解决问题的关键.

二. 填空题

11. **【分析】** 由比例尺的定义: 图上距离与实际距离的比叫做比例尺建立等量关系, 解这个一元一次方程就可以求出实际距离.

【解答】 解: 设这两城市的实际距离是 x 厘米, 由题意, 得:

$$1: 4000000 = 3: x,$$

$$\text{解得: } x = 12000000,$$

$$12000000 \text{ 厘米} = 120 \text{ km}.$$

故答案为: 120.

【点评】 本题考查了比例尺的意义的运用, 比例线段, 一元一次方程的解法, 注意单位之间的换算.

12. **【分析】** 根据比例设 $x = 2k$, $y = 5k$, 然后代入比例式进行计算即可得解.

$$\text{【解答】解: } \because \frac{x}{y} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore \text{设 } x = 2k, y = 5k,$$

$$\text{则 } \frac{y-x}{y+x} = \frac{5k-2k}{5k+2k} = \frac{3k}{7k} = \frac{3}{7}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{3}{7}.$$

【点评】 本题考查了比例的性质, 利用“设 k 法”表示出 x 、 y 可以使计算更加简便.



13. 【分析】根据位似变换的性质计算即可.

【解答】解：以点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{2}$ ，把 $\triangle ABO$ 缩小，点 A 的坐标是 $A(4, 2)$ ，

则点 A 的对应点 A_1 的坐标为 $(4 \times \frac{1}{2}, 2 \times \frac{1}{2})$ 或 $(-4 \times \frac{1}{2}, -2 \times \frac{1}{2})$ ，即 $(2, 1)$ 或 $(-2, -1)$ ，

故答案为： $(2, 1)$ 或 $(-2, -1)$ 。

【点评】本题考查的是位似变换的性质，在平面直角坐标系中，如果位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k ，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$ 。

14. 【分析】由三等分点的定义与平行线的性质得出 $BE=DE=AD$ ， $BF=GF=CG$ ， $AH=HF$ ， DH 是 $\triangle AEF$

的中位线，易证 $\triangle BEF \sim \triangle BAC$ ，得 $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$ ，解得 $EF=2$ ，则 $DH = \frac{1}{2}EF=1$ 。

【解答】解：∵ D 、 E 为边 AB 的三等分点， $EF \parallel DG \parallel AC$ ，

∴ $BE=DE=AD$ ， $BF=GF=CG$ ， $AH=HF$ ，

∴ $AB=3BE$ ， DH 是 $\triangle AEF$ 的中位线，

∴ $DH = \frac{1}{2}EF$ ，

∵ $EF \parallel AC$ ，

∴ $\triangle BEF \sim \triangle BAC$ ，

∴ $\frac{EF}{AC} = \frac{BE}{AB}$ ，即 $\frac{EF}{6} = \frac{BE}{3BE}$ ，

解得： $EF=2$ ，

∴ $DH = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2} \times 2 = 1$ ，

故答案为：1。

【点评】本题考查了三等分点的定义、平行线的性质、相似三角形的判定与性质、三角形中位线定理等知识；熟练掌握相似三角形的判定与性质是解题的关键。

15. 【分析】作 $AH \perp BC$ 于 H ，交 GF 于 M ，如图，先利用三角形面积公式计算出 $AH=3$ ，设正方形 $DEFG$

的边长为 x ，则 $GF=x$ ， $MH=x$ ， $AM=3-x$ ，再证明 $\triangle AGF \sim \triangle ABC$ ，则根据相似三角形的性质得 $\frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}$ ，

然后解关于 x 的方程即可。

【解答】解：作 $AH \perp BC$ 于 H ，交 GF 于 M ，如图，

∵ $\triangle ABC$ 的面积是 6，

∴ $\frac{1}{2}BC \cdot AH = 6$ ，

∴ $AH = \frac{2 \times 6}{4} = 3$ ，



设正方形 $DEFG$ 的边长为 x , 则 $GF=x$, $MH=x$, $AM=3-x$,

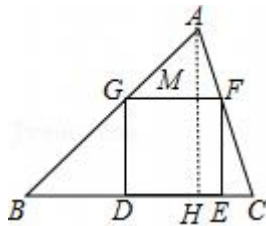
$\because GF \parallel BC$,

$\therefore \triangle AGF \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{GF}{BC} = \frac{AM}{AH}, \text{ 即 } \frac{x}{4} = \frac{3-x}{3}, \text{ 解得 } x = \frac{12}{7},$$

即正方形 $DEFG$ 的边长为 $\frac{12}{7}$.

故答案为 $\frac{12}{7}$.



【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质：在判定两个三角形相似时，应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件，以充分发挥基本图形的作用，寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形；在应用相似三角形的性质时，主要利用相似比计算相应线段的长，也考查了正方形的性质。

16. **【分析】** 过 O 点作 $OM \parallel AD$, 求出 AM 和 MO 的长, 利用 $\triangle AEF \sim \triangle MEO$, 得到关于 AF 的比例式, 求出 AF 的长即可.

【解答】 解: 过 O 点作 $OM \parallel AD$,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore OB = OD$,

$\therefore OM$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线,

$$\therefore AM = BM = \frac{1}{2}AB = \frac{5}{2}, \quad OM = \frac{1}{2}BC = 4,$$

$\because AF \parallel OM$,

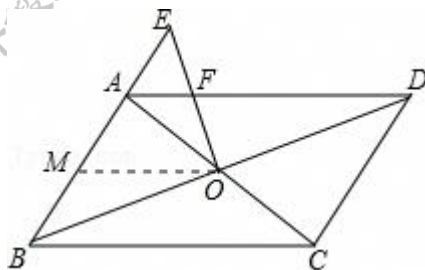
$\therefore \triangle AEF \sim \triangle MEO$,

$$\therefore \frac{AE}{EM} = \frac{AF}{OM},$$

$$\therefore \frac{2}{2+\frac{5}{2}} = \frac{AF}{4},$$

$$\therefore AF = \frac{16}{9},$$

故答案为 $\frac{16}{9}$.



【点评】 本题考查平行四边形的性质、三角形的中位线定理、平行线分线段成比例定理等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，学会用方程的思想思考问题，属于中考常考题型。

17. **【分析】** 首先根据题意得到 $\triangle GEA \sim \triangle AFH$, 然后利用相似三角形的对应边的比相等列出比例式求得答



案即可.

【解答】解: $EG \perp AB$, $FH \perp AD$, HG 经过 A 点,

$$\therefore FA \parallel EG, EA \parallel FH,$$

$$\therefore \angle HFA = \angle AEG = 90^\circ, \angle FHA = \angle EAG,$$

$$\therefore \triangle GEA \sim \triangle AFH,$$

$$\therefore \frac{EG}{FA} = \frac{EA}{FH}.$$

$$\because AB = 9 \text{ 里}, DA = 7 \text{ 里}, EG = 15 \text{ 里},$$

$$\therefore FA = 3.5 \text{ 里}, EA = 4.5 \text{ 里},$$

$$\therefore \frac{15}{3.5} = \frac{4.5}{FH},$$

解得: $FH = 1.05$ 里.

故答案为: 1.05.

【点评】 本题考查了相似三角形的应用, 解题的关键是从实际问题中整理出相似三角形, 难度不大.

18. **【分析】** 根据相似三角形的性质求出 P_3O 的坐标, 再根据相似三角形的性质计算求出 OP_4 的长, 得到答案.

【解答】 解: $\because$ 点 P_1, P_2 的坐标分别为 $(0, -1), (-2, 0)$,

$$\therefore OP_1 = 1, OP_2 = 2,$$

$$\because \text{Rt}\triangle P_1OP_2 \sim \text{Rt}\triangle P_2OP_3,$$

$$\therefore \frac{OP_1}{OP_2} = \frac{OP_2}{OP_3}, \text{ 即 } \frac{1}{2} = \frac{2}{OP_3},$$

解得, $OP_3 = 4$,

$$\because \text{Rt}\triangle P_2OP_3 \sim \text{Rt}\triangle P_3OP_4,$$

$$\therefore \frac{OP_2}{OP_3} = \frac{OP_3}{OP_4}, \text{ 即 } \frac{2}{4} = \frac{4}{OP_4},$$

解得, $OP_4 = 8$,

则点 P_4 的坐标为 $(8, 0)$,

故答案为: $(8, 0)$.

【点评】 本题考查的是相似三角形的判定和性质以及坐标与图形的性质, 掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

三. 解答题

19. **【分析】** (1) 利用相似多边形的性质求解;



(2) 利用相似多边形的性质求解即可.

【解答】解: (1) $\because$ 四边形 $ABCD \sim$ 四边形 $GFEH$,

$$\therefore \angle A = \angle G, \angle B = \angle F, \angle C = \angle E, \angle D = \angle H, \frac{AB}{GF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CD}{EH} = \frac{DA}{HG}.$$

(2) $\because$ 四边形 $ABCD \sim$ 四边形 $GFEH$,

$$\therefore \angle C = \angle E = 120^\circ, \angle F = \angle B = 55^\circ, \frac{AD}{GH} = \frac{CD}{HE},$$

$$\therefore \angle D = 360^\circ - \angle A - \angle B - \angle C = 115^\circ, \angle F = 55^\circ,$$

$$\therefore \frac{AD}{21} = \frac{20}{15},$$

$$\therefore AD = 28.$$

【点评】本题考查相似多边形的性质, 解题的关键是熟练掌握相似多边形的性质, 属于中考常考题型.

20. 【分析】由 $DE \parallel BC$, $EF \parallel CD$, 得 $\triangle AEF \sim \triangle ACD$, 可得 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 分别得 $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC}$, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$,

进而可证得 $\frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB}$, 便可求得答案.

【解答】解: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \text{ ①}.$$

$$\because EF \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ACD.$$

$$\therefore \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AC} \text{ ②}.$$

$$\text{由 ① 与 ②, 得 } \frac{AF}{AD} = \frac{AD}{AB},$$

$$\therefore AD^2 = AF \cdot AB = 4 \times 6 = 24.$$

$$\therefore AD = 2\sqrt{6}.$$

【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质. 此题难度不大, 注意掌握数形结合思想的应用.

21. 【分析】(1) 由 $DE \parallel BC$ 即可得出结论;

(2) 根据相似三角形对应边成比例得出比例式求解即可.

【解答】(1) 证明: $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC.$$

(2) 解: $\because \triangle ADE \sim \triangle ABC$,



$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

$$\because AD:BD=1:3,$$

$$\therefore AD:AB=1:4,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{1}{4}$$

$$\text{又} \because DE=2,$$

$$\therefore BC=4DE=8.$$

【点评】本题考查了相似三角形的判定与性质，明确相似三角形对应边成比例是解题的关键。

22. 【分析】此题中 P 点的位置不同时，角的对应关系也不同，所以应分情况讨论：

(1) 当 $\angle A$ 与 $\angle DPC$ 对应相等时；

(2) 当 $\angle A$ 与 $\angle D$ 对应相等时；然后根据各自的对应线段成比例求出 BP 的长。

【解答】解：(1) 当 $\triangle ABP \sim \triangle PCD$ 时， $\frac{AB}{BP} = \frac{PC}{CD}$ ， $\frac{4}{BP} = \frac{14-BP}{6}$ ，得 $BP=2$ 或 $BP=12$ ；

(2) 当 $\triangle ABP \sim \triangle DCP$ 时， $\frac{AB}{BP} = \frac{CD}{CP}$ ， $\frac{4}{BP} = \frac{6}{14-BP}$ ， $BP=5.6$ 。

综合以上可知，当 BP 的值为 2，12 或 5.6 时，两三角形相似。

【点评】考查相似三角形的判定定理，注意对应角相等，对应边成比例。

23. 【分析】(1) 连接 CB ，证明 $\triangle CAH \sim \triangle BAC$ 即可；

(2) 连接 CF ，证 $\triangle AEC \sim \triangle ACF$ ，根据射影定理即可证得。

【解答】证明：(1) 连接 CB ，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB=90^\circ,$$

而 $\angle CAH=\angle BAC$ ，

$$\therefore \triangle CAH \sim \triangle BAC,$$

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC},$$

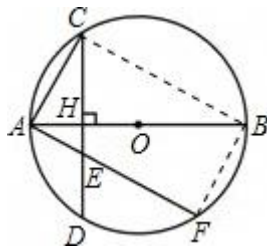
$$\text{即 } AH \cdot AB = AC^2;$$

(2) 连接 FB ，易证 $\triangle AHE \sim \triangle AFB$ ，

$$\therefore AE \cdot AF = AH \cdot AB,$$

$$\therefore AE \cdot AF = AC^2;$$

(也可连接 CF ，证 $\triangle AEC \sim \triangle ACF$)



【点评】本题考查了相似三角形的性质，其中由相似三角形的性质得出比例式是解题关键。



24. 【分析】(1) 证出 $\angle ABP = \angle CBQ$ ，由 SAS 证明 $\triangle BAP \cong \triangle BCQ$ 可得结论；

(2) 如图 1 证明 $\triangle APB \sim \triangle CEP$ ，列比例式可得 y 与 x 的关系式，根据 $CE = \frac{3}{8}BC$ 计算 CE 的长，即 y 的长，代入关系式解方程可得 x 的值；

(3) 如图 3，作辅助线，构建全等三角形，证明 $\triangle PGB \cong \triangle QEB$ ，得 $EQ = PG$ ，由 F 、 A 、 G 、 P 四点共圆，

得 $\angle FGP = \angle FAP = 45^\circ$ ，所以 $\triangle FPG$ 是等腰直角三角形，可得结论。

如图 4，当 F 在 AD 的延长线上时，同理可得结论。

【解答】(1) 证明：如图 1， $\because$ 线段 BP 绕点 B 顺时针旋转 90° 得到线段 BQ ，

$$\therefore BP = BQ, \angle PBQ = 90^\circ.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore BA = BC, \angle ABC = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ABC = \angle PBQ.$$

$$\therefore \angle ABC - \angle PBC = \angle PBQ - \angle PBC, \text{ 即 } \angle ABP = \angle CBQ.$$

在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle BCQ$ 中，

$$\therefore \begin{cases} BA = BC \\ \angle ABP = \angle CBQ, \\ BP = BQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAP \cong \triangle BCQ (SAS).$$

$$\therefore CQ = AP;$$

(2) 解：如图 1， $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ, \angle BCA = \frac{1}{2} \angle BCD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle APB + \angle ABP = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\because DC = AD = 2\sqrt{2},$$

$$\text{由勾股定理得：} AC = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4,$$

$$\because AP = x,$$

$$\therefore PC = 4 - x,$$

$\because \triangle PBQ$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle BPQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle APB + \angle CPQ = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\therefore \angle CPQ = \angle ABP,$$

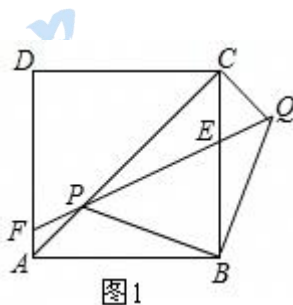


图1



$$\because \angle BAC = \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle APB \sim \triangle CEP,$$

$$\therefore \frac{AP}{CE} = \frac{AB}{CP},$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2\sqrt{2}}{4-x},$$

$$\therefore y = \frac{1}{2\sqrt{2}}x(4-x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \sqrt{2}x \quad (0 < x < 4),$$

$$\text{由 } CE = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \times 2\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \sqrt{2}x = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$(x-3)(x-1) = 0,$$

$$x = 3 \text{ 或 } 1,$$

$$\therefore \text{当 } x = 3 \text{ 或 } 1 \text{ 时, } CE = \frac{3}{8}BC;$$

(3) 解: 结论: $PF = EQ$, 理由是:

如图 2, 当 F 在边 AD 上时, 过 P 作 $PG \perp FQ$, 交 AB 于 G , 则 $\angle GPF = 90^\circ$,

$$\because \angle BPQ = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GPB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle GPB = \angle PQB = 45^\circ,$$

$$\because PB = BQ, \angle ABP = \angle CBQ,$$

$$\therefore \triangle PGB \cong \triangle QEB,$$

$$\therefore EQ = PG,$$

$$\because \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore F, A, G, P \text{ 四点共圆},$$

连接 FG ,

$$\therefore \angle FGP = \angle FAP = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle FPG \text{ 是等腰直角三角形},$$

$$\therefore PF = PG,$$

$$\therefore PF = EQ.$$

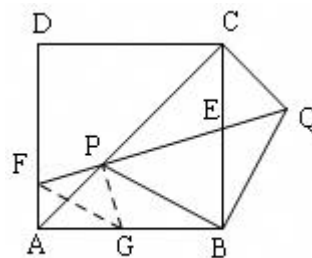


图2

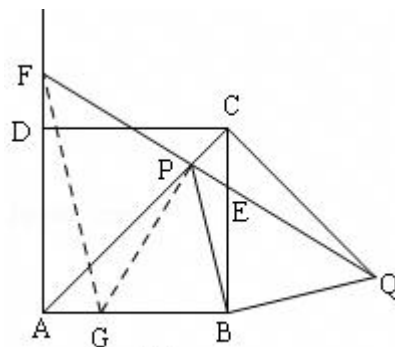


图3

当 F 在 AD 的延长线上时, 如图 3, 同理可得: $PF = PG = EQ$.



【点评】本题是四边形综合题目，考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理、四点共圆的性质和判定、相似三角形的判定与性质等知识；本题综合性强，有一定难度。

25. 【分析】(1) 由 $\triangle DAB \cong \triangle EAC$ (SAS)，可得 $BD=EC$ ， $\angle ABD=\angle ACE$ ，由 $\angle ACE+\angle ABE=90^\circ$ ，推出 $\angle ABD+\angle ABE=90^\circ$ ，可得 $\angle DBE=90^\circ$ ，由此即可解决问题；

(2) 结论： $EA^2=EC^2+2BE^2$ 。由题意 $\triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，想办法证明 $\triangle DAB \sim \triangle EAC$ ，推出 $\frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\angle ACE=\angle ABD$ ，可得 $\angle DBE=90^\circ$ ，推出 $DE^2=BD^2+BE^2$ ，即可解决问题；

(3) 首先证明 $AD=DE=EC$ ，设 $AD=DE=EC=x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中，利用勾股定理即可解决问题；

【解答】解：(1) 如图①中，

$\because BA=BC$ ， $DA=DE$ 。且 $\angle ABC=\angle ADE=60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 都是等边三角形，

$\therefore AD=AE$ ， $AB=AC$ ， $\angle DAE=\angle BAC=60^\circ$ ，

$\therefore \angle DAB=\angle EAC$ ，

$\therefore \triangle DAB \cong \triangle EAC$ (SAS)，

$\therefore BD=EC$ ， $\angle ABD=\angle ACE$ ，

$\because \angle ACE+\angle ABE=90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD+\angle ABE=90^\circ$ ，

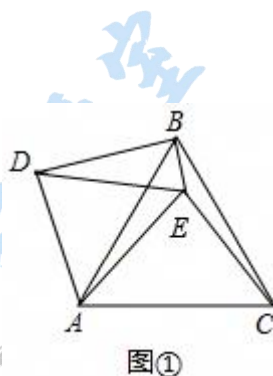
$\therefore \angle DBE=90^\circ$ ，

$\therefore DE^2=BD^2+BE^2$ ，

$\because EA=DE$ ， $BD=EC$ ，

$\therefore EA^2=BE^2+EC^2$ 。

故答案为 $BD=EC$ ， $EA^2=EB^2+EC^2$ 。



图①

(2) 结论： $EA^2=EC^2+2BE^2$ 。

理由：如图②中，

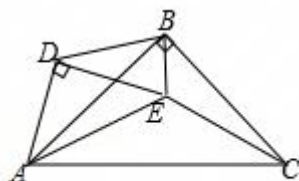
$\because BA=BC$ ， $DA=DE$ 。且 $\angle ABC=\angle ADE=90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ ， $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，

$\therefore \angle DAE=\angle BAC=45^\circ$ ，

$\therefore \angle DAB=\angle EAC$ ，

$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，



图②



$$\therefore \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC},$$

$$\therefore \triangle DAB \sim \triangle EAC,$$

$$\therefore \frac{DB}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \angle ACE = \angle ABD,$$

$$\because \angle ACE + \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle ABE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore DE^2 = BD^2 + BE^2,$$

$$\because EA = \sqrt{2}DE, \quad BD = \frac{\sqrt{2}}{2}EC,$$

$$\therefore \frac{1}{2}EA^2 = \frac{1}{2}EC^2 + BE^2,$$

$$\therefore EA^2 = EC^2 + 2BE^2.$$

(3) 如图③中,

$$\because \angle AED = 45^\circ, \quad D, E, C \text{ 共线},$$

$$\therefore \angle AEC = 135^\circ,$$

$$\because \triangle ADB \sim \triangle AEC,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AEC = 135^\circ,$$

$$\because \angle ADE = \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle BED = 45^\circ,$$

$$\therefore BD = BE,$$

$$\therefore DE = \sqrt{2}BD,$$

$$\therefore EC = \sqrt{2}BD,$$

$$\therefore AD = DE = EC, \quad \text{设 } AD = DE = EC = x,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because AB = BC = 2\sqrt{5},$

$$\therefore AC = 2\sqrt{10},$$

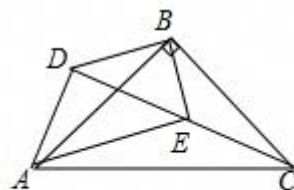
在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 中, $\because AD^2 + DC^2 = AC^2,$

$$\therefore x^2 + 4x^2 = 40,$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2} \quad (\text{负根已经舍弃}),$$

$$\therefore AD = DE = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BD = BE = 2,$$



图③



$$\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2.$$

【点评】本题属于三角形综合题，考查了等边三角形的判定和性质，等腰直角三角形的判定和性质，全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形或相似三角形解决问题，属于中考压轴题.

