

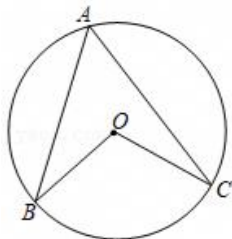


《圆》单元测试卷

一、选择题

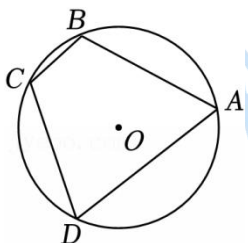
1. (3分) 如图, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, $\angle BAC = 54^\circ$, 则 $\angle BOC$ 的度数为 ()

- A. 27°
B. 108°
C. 116°
D. 128°



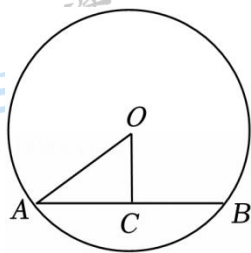
2. 如图, A, B, C, D 是 $\odot O$ 上的四点, 若 $\angle D = 70^\circ$, 则 $\angle B$ 的度数为 ()

- A. 100°
B. 110°
C. 70°
D. 109°



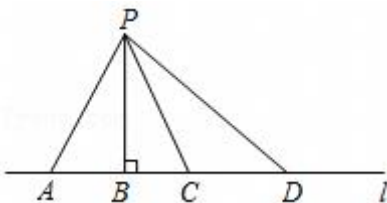
3. 如图, AB 是 $\odot O$ 的弦, 若 $\odot O$ 的半径 $OA = 5$, 圆心 O 到弦 AB 的距离 $OC = 3$, 则弦 AB 的长为 ()

- A. 4
B. 6
C. 8
D. 10



4. 如图, 以点 P 为圆心作圆, 所得的圆与直线 l 相切的是 ()

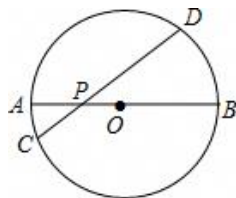
- A. 以 PA 为半径的圆
B. 以 PB 为半径的圆
C. 以 PC 为半径的圆
D. 以 PD 为半径的圆





5. 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 弦 CD 交 AB 于点 P , $AP=2$, $BP=6$, $\angle APC=30^\circ$, 则 CD 的长为 ()

- A. $\sqrt{15}$
- B. $2\sqrt{5}$
- C. $2\sqrt{15}$
- D. 8



6. 下列说法中正确的个数有 ()

- ①相等的圆心角所对的弧相等;
- ②平分弦的直径一定垂直于弦;
- ③圆是轴对称图形, 每一条直径都是对称轴;
- ④直径是弦;
- ⑤长度相等的弧是等弧.

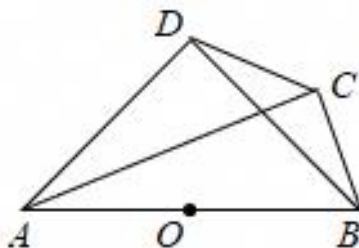
- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

7. 已知 $\odot O$ 的直径 $CD=10cm$, AB 是 $\odot O$ 的弦, $AB=8cm$, 且 $AB \perp CD$, 垂足为 M , 则 AC 的长为 ()

- A. $2\sqrt{5}cm$
- B. $4\sqrt{5}cm$
- C. $2\sqrt{5}cm$ 或 $4\sqrt{5}cm$
- D. $2\sqrt{3}cm$ 或 $4\sqrt{3}cm$

8. 如图, 点 O 为线段 AB 的中点, 点 B, C, D 到点 O 的距离相等, 连接 AC, BD . 则下面结论不一定成立的是 ()

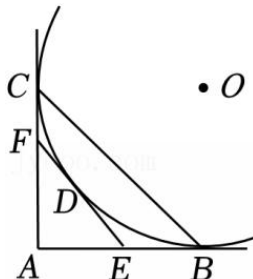
- A. $\angle ACB=90^\circ$
- B. $\angle BDC=\angle BAC$
- C. AC 平分 $\angle BAD$
- D. $\angle BCD+\angle BAD=180^\circ$





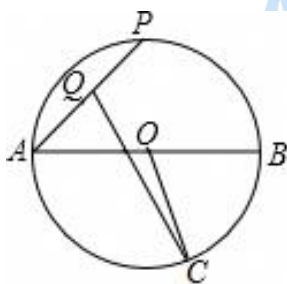
9. 如图，过点 A 作 $\odot O$ 的切线 AB , AC ，切点分别是 B , C ，连接 BC 。过 $\widehat{BC}$ 上一点 D 作 $\odot O$ 的切线，交 AB , AC 于点 E , F 。若 $\angle A = 90^\circ$ ， $\triangle AEF$ 的周长为 4，则 BC 的长为 ()

- A. 2
B. $2\sqrt{2}$
C. 4
D. $4\sqrt{2}$



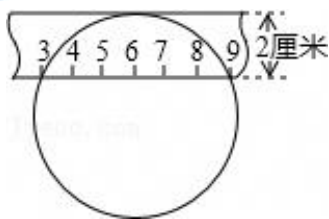
10. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， C 为 $\odot O$ 上一点，其中 $AB = 4$ ， $\angle AOC = 120^\circ$ ， P 为 $\odot O$ 上的动点，连接 AP ，取 AP 中点 Q ，连接 CQ ，则线段 CQ 的最大值为 ()

- A. 3
B. $1 + \sqrt{6}$
C. $1 + 3\sqrt{2}$
D. $1 + \sqrt{7}$

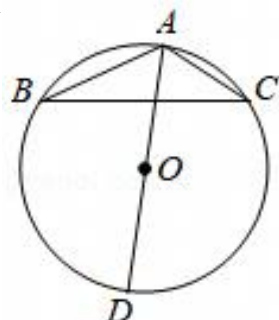


二、填空题

11. 如图， AD 为 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的直径， $\angle BAD = 55^\circ$ ，则 $\angle ACB =$ _____ $^\circ$ 。

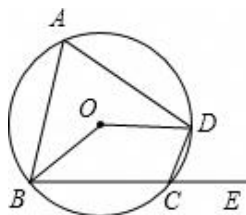


12. 如图，一个宽为 2 厘米的刻度尺（刻度单位：厘米），放在圆形玻璃杯的杯口上，刻度尺的一边与杯口外沿相切，另一边与杯口外沿两个交点处的读数恰好是 3 和 9，那么玻璃杯的杯口外沿半径为 _____ 厘米。





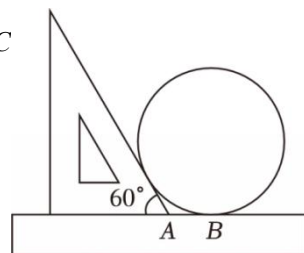
13. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 若 $\angle BOD = 138^\circ$, 则它的一个外角 $\angle DCE$ 等于_____.



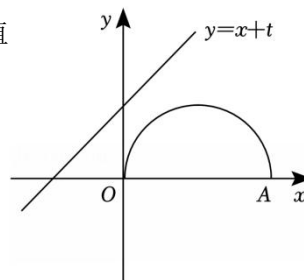
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, $BC = 8$, 则 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $r =$ _____.

15. 小明同学测量一个圆形零件的半径时, 他将直尺、三角板 and 这个零件如图放置于桌面上, 零件与直尺、三角板均相切, 测得点 A 与其中一个切点 B 的距离为 3cm , 则这个零件的半径是_____ cm .

16. 已知: $\odot O$ 半径 $OA = 1$, 弦 AB 、 AC 长分别为 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$, 则 $\angle BAC$ =_____.



17. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$, 以 OA 为直径在 x 轴上方作半圆, 直线 l 的解析式为 $y = x + t$, 若直线 l 与半圆只有一个公共点, 则 t 的值是_____.



18. 对于一个半径为 R 的 $\odot O$, 有如下几个结论:

- ① 存在无数个 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, 满足 $\angle ABC = 70^\circ$, 但 AC 边的长是唯一确定的;
- ② 存在无数条弦 AB , 满足点 O 到 AB 的距离等于 d ($0 \leq d < R$), 但 AB 的长是唯一确定的;
- ③ 在所有与 $\odot O$ 相离的直线中, 至少存在一条直线 l , l 上存在一点 P 到 O 的距离等于 R .

上述结论中, 所有正确结论的序号是_____.



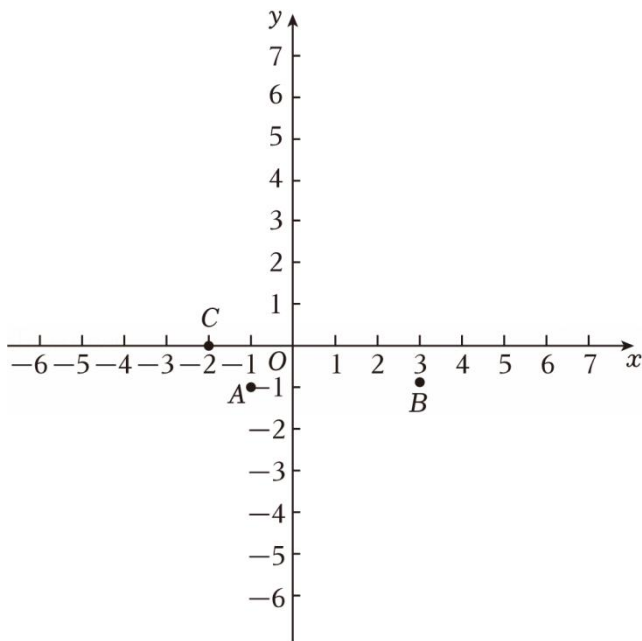
三、解答题

19. 如图，平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(-1, -1)$ ， $B(3, -1)$ ， $C(-2, 0)$ 作过点 A 、 B 、 C 的圆.

(1) 依题意补全图形；

(2) 圆心 M 坐标为 _____；

(3) 若点 P 为圆上任意一点（不与 B 、 C 点重合），则 $\angle BPC$ 的度数为 _____.



20. 下面是小立设计的“过圆上一点作这个圆的切线”的尺规作图过程.

已知： $\odot O$ 及圆上一点 A .

求作：直线 AB ，使得 AB 为 $\odot O$ 的切线， A 为切点.

作法：如图 2，

① 连接 OA 并延长到点 C ；

② 分别以点 A ， C 为圆心，大于 $\frac{1}{2}AC$ 长为半径作弧，
两弧交于点 D （点 D 在直线 OA 上方）；

③ 以点 D 为圆心， DA 长为半径作 $\odot D$ ；

④ 连接 CD 并延长，交 $\odot D$ 于点 B ，作直线 AB .

直线 AB 就是所求作的直线.

根据小立设计的尺规作图过程，完成下面的证明。（说明：括号里填推理的依据）

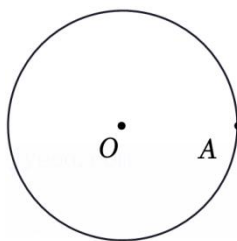


图1

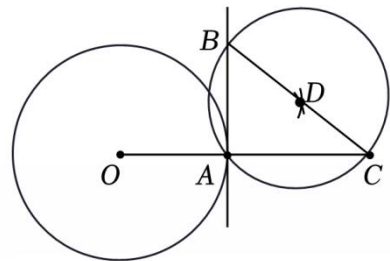


图2



证明：连接 AD 。

$\because$ _____ $= AD$

$\therefore$ 点 C 在 $\odot D$ 上，

$\therefore CB$ 是 $\odot D$ 的直径。

$\therefore$ _____ $= 90^\circ$. (_____)

$\therefore AB \perp$ _____ .

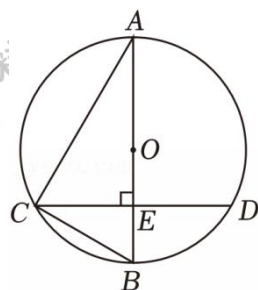
$\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线. (_____)

21. 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E ，连接 AC ， BC 。

(1) 求证： $\angle CAB = \angle BCD$ ；

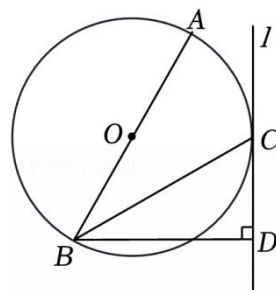
(2) 若 $AB=4$ ， $BC=2$ ，求 CD 的长。



22. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，点 C 在 $\odot O$ 上。 BC 平分 $\angle ABD$ ，过点 B 作 $BD \perp l$ 于点 D 。

(1) 求证： CD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 连接 OD ，若 $\angle ABD=60^\circ$ ， $CD=3$ ，求 OD 的长。





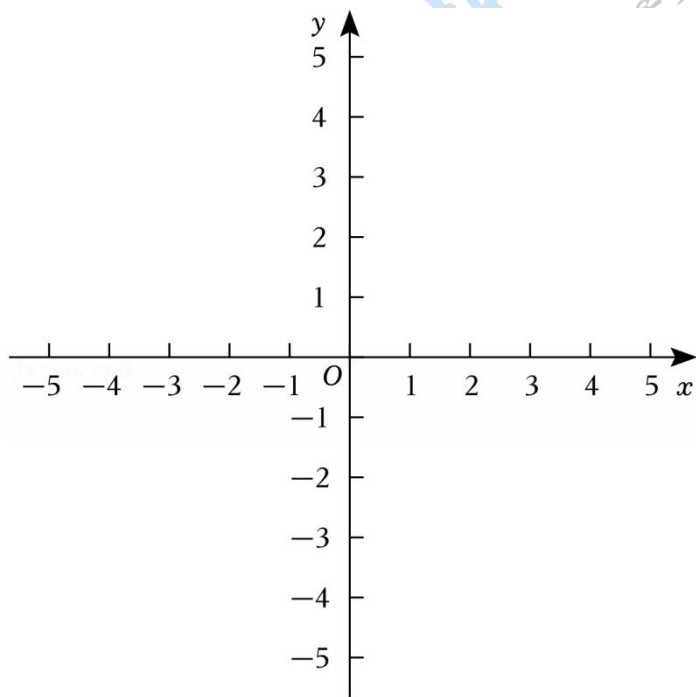
23. 定义：在平面直角坐标系 xOy 中，对于 $\odot M$ 内的一点 P ，若在 $\odot M$ 外存在点 P' ，使得 $MP' = 2MP$ ，则称点 P 为 $\odot M$ 的“内二分点”。

(1) 当 $\odot O$ 的半径为 2 时，

① 在 $P_1(-1, 0)$, $P_2(1, \frac{3}{2})$, $P_3(\sqrt{2}, -1)$, $P_4(-\sqrt{3}, -1)$ 四个点中，是 $\odot O$ 的“内二分点”的是 _____；

② 已知一次函数 $y = kx - 2k$ 在第一象限的图象上的所有点都是 $\odot O$ 的“内二分点”，求 k 的取值范围；

(2) 已知点 $M(m, 0)$, $B(0, -1)$, $C(1, -1)$, $\odot M$ 的半径为 4，若线段 BC 上存在 $\odot M$ 的“内二分点”，直接写出 m 的取值范围。





《圆》单元测试卷

参考答案与试题解析

一、选择题

1. 【分析】直接由圆周角定理求解即可.

【解答】解： $\because \angle A = 54^\circ$ ，

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 108^\circ，$$

故选：B.

【点评】本题考查了圆周角定理，熟练掌握圆周角定理是解题的关键.

2. 【分析】根据圆内接四边形的对角互补计算即可.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形，

$$\therefore \angle B + \angle D = 180^\circ，$$

$$\because \angle D = 70^\circ，$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ，$$

故选：B.

【点评】本题考查的是圆内接四边形的性质，熟记圆内接四边形的对角互补是解题的关键.

3. 【分析】利用点到直线的距离的定义得到 $OC \perp AB$ ，则根据垂径定理得到 $AC = BC$ ，然后利用勾股定理计算出 AC ，从而得到 AB 的长.

【解答】解： $\because$ 圆心 O 到弦 AB 的距离 $OC = 3$ ，

$$\therefore OC \perp AB，$$

$$\therefore AC = BC，$$

在 $\text{Rt}\triangle OAC$ 中， $\because OA = 5$ ， $OC = 3$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4，$$

$$\therefore AB = 2AC = 8.$$

故选：C.

【点评】本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分这条弦，并且平分弦所对的两条弧. 也考查了勾股定理.



4. 【分析】根据直线与圆的位置关系的判定方法进行判断.

【解答】解：∵ $PB \perp l$ 于点 B ,

∴ 以点 P 为圆心, PB 为半径的圆与直线 l 相切.

故选: B .

【点评】本题考查了直线与圆的位置关系: 判断直线和圆的位置关系: 设 $\odot O$ 的半径为 r , 圆心 O 到直线 l 的距离为 d . 若直线 l 和 $\odot O$ 相交 $\Leftrightarrow d < r$; 直线 l 和 $\odot O$ 相切 $\Leftrightarrow d = r$; 直线 l 和 $\odot O$ 相离 $\Leftrightarrow d > r$.

5. 【分析】作 $OH \perp CD$ 于 H , 连接 OC , 如图, 根据垂径定理由 $OH \perp CD$ 得到 $HC = HD$, 再利用 $AP = 2$, $BP = 6$ 可计算出半径 $OA = 4$, 则 $OP = OA - AP = 2$, 接着在 $\text{Rt}\triangle OPH$ 中根据含 30° 的直角三角形的性质计算出 $OH = \frac{1}{2}OP = 1$, 然后在 $\text{Rt}\triangle OHC$ 中利用勾股定理计算出 $CH = \sqrt{15}$, 所以 $CD = 2CH = 2\sqrt{15}$.

【解答】解: 作 $OH \perp CD$ 于 H , 连接 OC , 如图,

∵ $OH \perp CD$,

∴ $HC = HD$,

∵ $AP = 2$, $BP = 6$,

∴ $AB = 8$,

∴ $OA = 4$,

∴ $OP = OA - AP = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle OPH$ 中, ∵ $\angle OPH = \angle APC = 30^\circ$,

∴ $\angle POH = 60^\circ$,

∴ $OH = \frac{1}{2}OP = 1$,

在 $\text{Rt}\triangle OHC$ 中, ∵ $OC = 4$, $OH = 1$,

∴ $CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{15}$,

∴ $CD = 2CH = 2\sqrt{15}$.

故选: C .

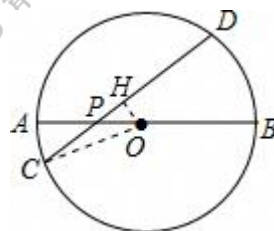
【点评】本题考查了垂径定理: 垂直于弦的直径平分这条弦, 并且平分弦所对的两条弧. 也考查了勾股定理以及含 30° 的直角三角形的性质.

6. 【分析】根据圆周角定理、垂径定理、圆的性质、直径的性质、等弧的定义一一判断即可;

【解答】解: ①相等的圆心角所对的弧相等; 错误. 必须在同圆或等圆中;

②平分弦的直径一定垂直于弦; 错误, 此弦不是直径;

③圆是轴对称图形, 每一条直径都是对称轴; 错误, 应该是每一条直径所在的直线都是对称轴;





④直径是弦；正确；

⑤长度相等的弧是等弧。错误。能够完全重合的两条弧是等弧；

故选：A.

【点评】本题考查圆周角定理、垂径定理、圆的性质、直径的性质、等弧的定义等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型。

7. 【分析】先根据题意画出图形，由于点C的位置不能确定，故应分两种情况进行讨论。

【解答】解：如图，连接AC，AO，

$\because \odot O$ 的直径 $CD=10\text{cm}$ ， $AB \perp CD$ ， $AB=8\text{cm}$ ，

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4\text{cm}$ ， $OD=OC=5\text{cm}$ ，

当C点位置如图1所示时，

$\because OA=5\text{cm}$ ， $AM=4\text{cm}$ ， $CD \perp AB$ ，

$\therefore OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$ ，

$\therefore CM = OC + OM = 5 + 3 = 8\text{cm}$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}\text{cm}$ ；

当C点位置如图2所示时，同理可得 $OM=3\text{cm}$ ，

$\because OC=5\text{cm}$ ，

$\therefore MC = 5 - 3 = 2\text{cm}$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AMC$ 中， $AC = \sqrt{AM^2 + MC^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}\text{cm}$ 。

故选：C.

【点评】本题考查的是垂径定理，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键。

8. 【分析】先利用圆的定义可判断点A、B、C、D在 $\odot O$ 上，如图，然后根据圆周角定理对各选项进行判断。

【解答】解： $\because$ 点O为线段AB的中点，点B、C、D到点O的距离相等，

$\therefore$ 点A、B、C、D在 $\odot O$ 上，如图，

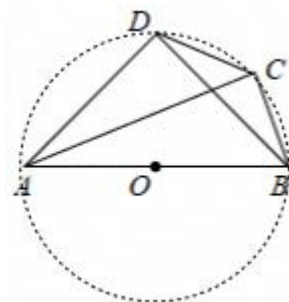
$\because AB$ 为直径，

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，所以A选项的结论正确；

$\because \angle BDC$ 和 $\angle BAC$ 都对 $\widehat{BC}$ ，

$\therefore \angle BDC = \angle BAC$ ，所以B选项的结论正确；

只有当 $CD=CB$ 时， $\angle BAC = \angle DAC$ ，所以C选项的结论不正确；





∵ 四边形 $ABCD$ 为 $\odot O$ 的内接四边形,

∴ $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$, 所以 D 选项的结论正确.

故选: C .

【点评】 本题考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半. 半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径.

9. **【分析】** 根据切线长定理得到 $AC=AB$, 再根据切线长定理、三角形的周长公式计算, 得到答案.

【解答】 解: ∵ AB 、 AC 为 $\odot O$ 的切线,

∴ $AC=AB$,

∵ FD 、 FC 为 $\odot O$ 的切线,

∴ $FD=FC$,

同理, $ED=EB$,

∴ $\triangle AEF$ 的周长 $= AE+AF+EF = AE+EB+AF+FC = AB+AC=4$,

∴ $AC=AB=2$,

∴ $BC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}$.

故选: B .

【点评】 本题考查的是切线的性质, 掌握切线长定理是解题的关键.

10. **【分析】** 如图, 连接 OQ , 作 $CH \perp AB$ 于 H . 首先证明点 Q 的运动轨迹为以 AO 为直径的 $\odot K$, 连接 CK , 当点 Q 在 CK 的延长线上时, CQ 的值最大, 利用勾股定理求出 CK 即可解决问题;

【解答】 解: 如图, 连接 OQ , 作 $CH \perp AB$ 于 H .

∵ $AQ=QP$,

∴ $OQ \perp PA$,

∴ $\angle AQO = 90^\circ$,

∴ 点 Q 的运动轨迹为以 AO 为直径的 $\odot K$, 连接 CK ,

当点 Q 在 CK 的延长线上时, CQ 的值最大 (也可以通过 $CQ \leq QK + CK$ 求解)

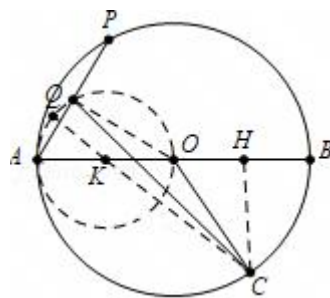
在 $\text{Rt}\triangle OCH$ 中, ∵ $\angle COH = 60^\circ$, $OC = 2$,

∴ $OH = \frac{1}{2}OC = 1$, $CH = \sqrt{3}$,

在 $\text{Rt}\triangle CKH$ 中, $CK = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}$,

∴ CQ 的最大值为 $1 + \sqrt{7}$,

故选: D .





【点评】本题考查圆周角定理、轨迹、勾股定理、点与圆的位置关系等知识，解题的关键是正确寻找点 Q 的运动轨迹，学会构造辅助圆解决问题，属于中考填空题中的压轴题。

二、填空题

11. 【分析】连接 BD ，根据圆周角定理的推论得到 $\angle ABD = 90^\circ$ ，根据直角三角形的性质求出 $\angle ADB$ ，根据圆周角定理解答即可。

【解答】解：连接 BD ，

$\because AD$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 的直径，

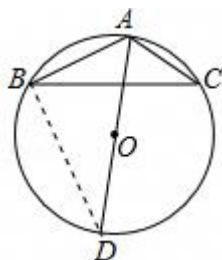
$\therefore \angle ABD = 90^\circ$ ，

$\because \angle BAD = 55^\circ$ ，

$\therefore \angle ADB = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$ ，

由圆周角定理得， $\angle ACB = \angle ADB = 35^\circ$ ，

故答案为：35。



【点评】本题考查的是三角形的外接圆与外心，掌握圆周角定理的解题的关键。

12. 【分析】先求出弦 AC 的长，再过点 O 作 $OB \perp AC$ 于点 B ，由垂径定理可得出 AB 的长，设杯口的半径为 r ，则 $OB = r - 2$ ， $OA = r$ ，在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中根据勾股定理求出 r 的值即可。

【解答】解： $\because$ 杯口外沿两个交点处的读数恰好是 3 和 9，

$\therefore AC = 9 - 3 = 6$ ，

过点 O 作 $OB \perp AC$ 于点 B ，则 $AB = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3\text{cm}$ ，

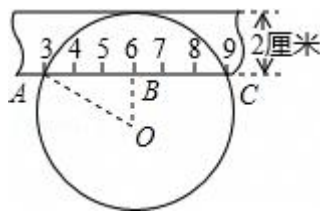
设杯口的半径为 r ，则 $OB = r - 2$ ， $OA = r$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中，

$OA^2 = OB^2 + AB^2$ ，即 $r^2 = (r - 2)^2 + 3^2$ ，

解得 $r = \frac{13}{4}\text{cm}$ 。

故答案为： $\frac{13}{4}$ 。



【点评】本题考查的是垂径定理的应用，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键。

13. 【分析】由 $\angle BOD = 138^\circ$ ，根据在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半，即可求得 $\angle A$ 的度数，又由圆的内接四边形的性质，求得 $\angle BCD$ 的度数，继而求得 $\angle DCE$ 的度数

【解答】解： $\because \angle BOD = 138^\circ$ ，



$$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle BOD = 69^\circ,$$

$$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle A = 111^\circ,$$

$$\therefore \angle DCE = 180^\circ - \angle BCD = 69^\circ.$$

故答案为: 69° .

【点评】此题考查了圆周角定理与圆的内接四边形的性质. 此题比较简单, 解题的关键是注意掌握在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半与圆内接四边形的对角互补定理的应用.

14. **【分析】**设 $\odot O$ 切 AC 于点 E , 切 BC 于 F , 切 AB 于 G , 连接 OE , OF , 由切线的性质易证四边形 $CEOF$ 为正方形, 得到 $CE=CF=r$, 由切线长定理得 $AE=AG=6-r$, $BF=BG=8-r$, 利用 $6-r+8-r=10$ 可求出 r .

【解答】解: 如图, $\odot O$ 切 AC 于点 E , 切 BC 于 F , 切 AB 于 G , 连接 OE , OF ,

$$\therefore OE \perp AC, OF \perp BC,$$

$\therefore$ 正方形 $CEOF$ 为正方形,

$$\because \angle C = 90^\circ, AC = 6, BC = 8,$$

$$\therefore AB = 10,$$

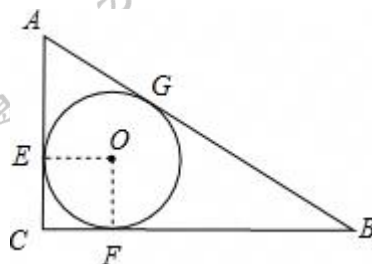
设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $CE=CF=r$,

$$\therefore AE=AG=6-r, BF=BG=8-r,$$

$$\therefore AB=AG+BG=AE+BF, \text{ 即 } 6-r+8-r=10,$$

解得: $r=2$.

故答案为: 2.



【点评】本题考查了圆的切线的性质和切线长定理: 圆的切线垂直于过切点的半径; 从圆外一点引圆的两条切线, 切线长度相等. 证得四边形 $CEOF$ 为正方形是解题的关键.

15. **【分析】**设圆形零件的圆心是 O , 连接 OA , OB , 由切线的性质定理得到 $OB \perp AB$, 由切线长定理推出 OA 平分 $\angle BAC$, 求出 $\angle BAC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, 得到 $\angle OAB = 60^\circ$, 由锐角的正切求出 $OB = 3 \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}$ (cm), 得到这个零件的半径是 $3\sqrt{3}$ cm.

【解答】解: 设圆形零件的圆心是 O , 连接 OA , OB ,

$\because \odot O$ 与直尺, 三角板均相切, 切点分别是 B 和 C ,

$$\therefore OB \perp AB, OA \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAC,$$



$$\because \angle BAC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ,$$

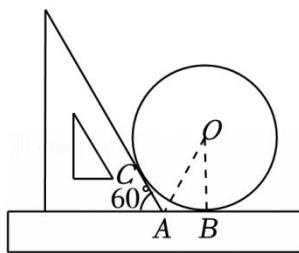
$$\therefore \angle OAB = 60^\circ,$$

$$\because \tan \angle OAB = \tan 60^\circ = \frac{OB}{AB},$$

$$\therefore OB = 3 \tan 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ (cm)},$$

$$\therefore \text{这个零件的半径是 } 3\sqrt{3} \text{ cm}.$$

故答案为: $3\sqrt{3}$.



【点评】本题考查切线的性质，切线长定理，解直角三角形，关键是由切线长定理推出 $\angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAC$.

16. 【分析】画出图形，构造出直角三角形，根据勾股定理求得三角形的边长，求得 $\angle BAO$ 和 $\angle CAO$ ，再求出 $\angle BAC$ 的度数即可.

【解答】解：如图，过点 O 作 $OE \perp AB$ ， $OF \perp AC$ ，垂足分别为 E ， F ，

$$\because AB = \sqrt{2}, AC = \sqrt{3},$$

$$\therefore \text{由垂径定理得, } AE = \frac{\sqrt{2}}{2}, AF = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because OA = 1,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得 } OE = \frac{\sqrt{2}}{2}, OF = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BAO = 45^\circ,$$

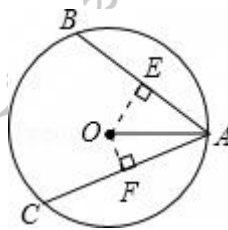
$$\therefore OF = \frac{1}{2} OA,$$

$$\therefore \angle CAO = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 75^\circ,$$

当 AB 、 AC 在半径 OA 同旁时， $\angle BAC = 15^\circ$.

故答案为: 75° 或 15° .



【点评】本题考查了勾股定理和垂径定理，解此类题目要注意将圆的问题转化成三角形的问题再行计算.

17. 【分析】设直线 $y = x + t$ 与 x 轴交于 E ，与 y 轴交于 D ，与圆唯一的公共点为 C ，圆心为 B ，连接 BC ，根据等腰直角三角形的判定和性质即可得到结论.

【解答】解：设直线 $y = x + t$ 与 x 轴交于 E ，与 y 轴交于 D ，与圆唯一的公共点为 C ，圆心为 B ，

连接 BC ，

则 $\angle BCE = 90^\circ$,



$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2\sqrt{2}, 0)$,

$\therefore OA = 2\sqrt{2}$,

$\therefore BC = OB = \sqrt{2}$,

在 $y = x + t$ 中, 令 $x = 0$, 则 $y = t$, 令 $y = 0$, 则 $x = -t$,

$\therefore E(-t, 0), D(0, t)$,

$\therefore OD = OE$,

$\therefore \triangle ODE$ 是等腰直角三角形,

$\therefore \angle DEO = 45^\circ$,

$\therefore \angle EBC = 45^\circ$,

$\therefore BE = \sqrt{2}BC$,

$\therefore t + \sqrt{2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$,

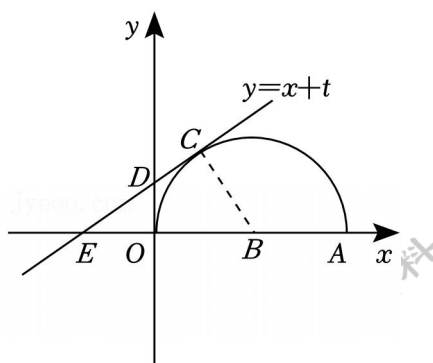
$\therefore t = 2 - \sqrt{2}$,

当直线 $y = x + t$ 经过点 A 时,

则有 $2\sqrt{2} + t = 0$,

解得 $t = -2\sqrt{2}$,

故答案为: $2 - \sqrt{2}$ 或 $-2\sqrt{2} \leq t < 0$.



【点评】 本题考查了直线与圆的位置关系, 等腰直角三角形的判定和性质, 切线的性质, 熟练掌握等腰直角三角形的判定和性质定理是解题的关键.

18. **【分析】** 利用 $\angle ABC = 70^\circ$ 可确定 $\widehat{AC}$ 的长度为定值, 则 AC 的长为定值, 根据圆周角定理, 当点 A 在弦 AC 所对的优弧上 (点 A 、 C 除外) 时, 满足 $\angle ABC = 70^\circ$, 则可对①进行判断; 以 O 点圆心, d 为半径作 $\odot O$ 的同心圆, 由于与小圆相切的大圆的弦都等于 AB , 从而可对②进行判断; 根据直线与 $\odot O$ 相离可得到圆心 O 到直线的距离大于 R , 从而可对③进行判断.

【解答】 解: $\because \angle ABC = 70^\circ$,

$\therefore \angle AOC = 140^\circ$,

$\therefore \widehat{AC}$ 的长度为定值,

$\therefore AC$ 的长为定值,

当点 A 在弦 AC 所对的优弧上 (点 A 、 C 除外) 时, 满足 $\angle ABC = 70^\circ$, 所以①正确;

以 O 点圆心, d 为半径作 $\odot O$ 的同心圆, 则与小圆相切的大圆的弦都等于 AB , 所以②正确;

$\therefore$ 直线与 $\odot O$ 相离,



∴ 圆心 O 到直线的距离大于 R ,

∴ l 上不存在一点 P 到 O 的距离等于 R , 所以③错误.

故答案为: ①②.

【点评】 本题考查了三角形的外接圆与外心: 经过三角形的三个顶点的圆, 叫做三角形的外接圆. 三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点, 叫做三角形的外心. 也考查了圆周角定理和直线与圆的位置关系.

三、解答题

19. **【分析】** (1) 线段 AB , AC 的垂直平分线的交点 M , 即为圆心;

(2) 根据点 M 的位置写出坐标;

(3) 分两种情形: 当点 P 在优弧 BC 上时, $\angle BPC = \frac{1}{2}\angle BMC = 45^\circ$, 当点 P 在劣弧 BC 上时, $\angle BPC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ 求解.

【解答】 解: (1) 如图, $\odot M$ 即为所求;

(2) 圆心 M 坐标为 $(1, 2)$.

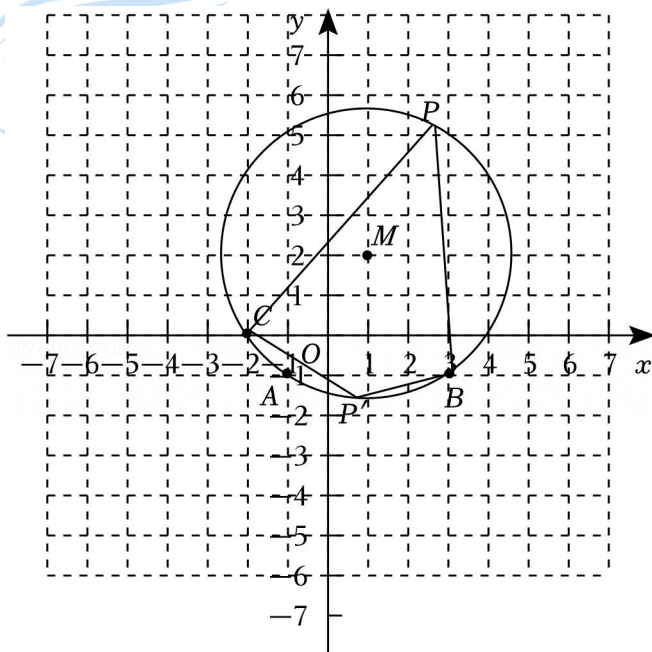
故答案为: $(1, 2)$;

(3) 当点 P 在优弧 BC 上时, $\angle BPC = \frac{1}{2}\angle BMC = 45^\circ$,

当点 P 在劣弧 BC 上时, $\angle BPC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$,

综上所述, $\angle BPC$ 的度数为 45° 或 135° ,

故答案为: 45° 或 135° .





【点评】本题考查作图 - 复杂作图，三角形的外接圆，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题。

20. 【分析】根据题中的过程，结合图形进行合情推理。

【解答】证明：如图：连接 AD ，

$$\because CD=AD$$

$\therefore$ 点 C 在 $\odot D$ 上，

$\therefore CB$ 是 $\odot D$ 的直径。

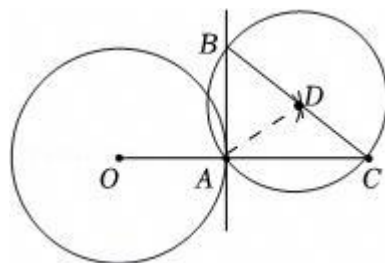
$\therefore \angle BAC=90^\circ$ （直径所对的圆周角是 90° ），

$\therefore AB \perp AC$ ，

$\because OA$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的切线，（过半径的外端且垂直于半径的直线是圆的切线），

故答案为： CD ， $\angle BAC$ ，直径所对的圆周角是 90° ， OA ，过半径的外端且垂直于半径的直线是圆的切线。



【点评】本题考查了作图的证明，掌握圆的切线的判定是解题的关键。

21. 【分析】（1）根据等弧对等角证明即可；

（2）连接 OC ，根据垂径定理得到 $CE=DE$ ，再利用勾股定理计算出 CE ，然后计算 $2CE$ 即可。

【解答】（1）证明： $\because$ 直径 $AB \perp$ 弦 CD ，

$\therefore$ 弧 BC = 弧 BD 。

$\therefore \angle A = \angle BCD$ ；

（2）连接 OC ，

$\because$ 直径 $AB \perp$ 弦 CD ，

$\therefore CE=ED$ 。

$\because$ 直径 $AB=4$ ，

$\therefore CO=OB=2$ ，

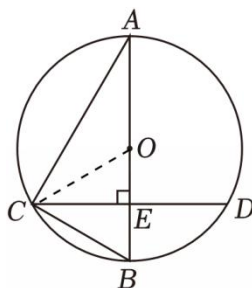
$\because BC=2$ ，

$\therefore \triangle OCB$ 是等边三角形，

$\therefore \angle COE=60^\circ$ ，

$\therefore \angle OCE=30^\circ$ ，

$\therefore OE=\frac{1}{2}OC=1$ ，





在 $\text{Rt}\triangle COE$ 中,

$$\therefore CE = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore CD = 2CE = 2\sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了垂径定理：垂直于弦的直径平分弦，并且平分弦所对的弧。也考查了勾股定理和圆周角定理。

22. **【分析】** (1) 连接 OC ，由题意可证 $OC \parallel BD$ ，进而证明 CD 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 连接 OD ，过点 O 作 $OG \perp BD$ 于点 G ，得矩形 $OCDG$ ，可得 $OG = CD = 3$ ，由锐角三角函数的概念求出 OB 的长，然后由勾股定理可得出答案。

【解答】 (1) 证明：连接 OC ，

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \angle OBC = \angle OCB,$$

$$\because BC \text{ 平分 } \angle ABD,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle CBD,$$

$$\therefore \angle OCB = \angle CBD,$$

$$\therefore OC \parallel BD,$$

$$\because BD \perp DC,$$

$$\therefore OC \perp DC,$$

$\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径，

$\therefore CD$ 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 解：连接 OD ，过点 O 作 $OG \perp BD$ 于点 G ，

得矩形 $OCDG$ ，

$$\therefore OG = CD = 3,$$

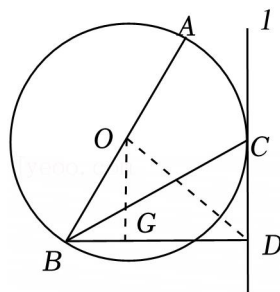
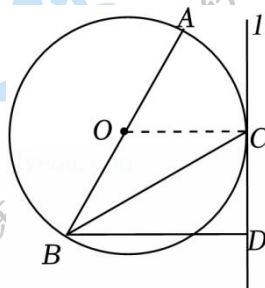
在 $\text{Rt}\triangle OBG$ 中， $\angle ABD = 60^\circ$ ， $OG = 3$ ，

$$\therefore \sin 60^\circ = \frac{OG}{OB},$$

$$\therefore OB = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore OC = OB = 2\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中，根据勾股定理得：





$$OD = \sqrt{OC^2 + CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{21}.$$

【点评】本题考查的是切线的判定定理、锐角三角函数的定义，掌握圆的切线垂直于经过切点的半径是解题的关键。

23. 【分析】(1) 根据“内二分点”的定义， $\odot O$ 的半径为 2 时， P 在 $\odot O$ 内， P' 在 $\odot O$ 外，即可知 $1 < OP < 2$;

① 求出 $OP_1=1$, $OP_2=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $OP_3=\sqrt{3}$, $OP_4=2$, 即得 $\odot O$ 的“内二分点”的是 P_2, P_3 ;

② 可知 $k < 0$, 且直线 $y=kx-2k$ 过定点 $B(2, 0)$ 和 $A(0, -2k)$, 过 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C , 面积法可得 $OC = \frac{OB \cdot OA}{AB} = -\frac{2k}{\sqrt{k^2+1}}$, 根据一次函数在第一象限的图象上的所有点都是 $\odot O$ 的“内二分点”得 $1 < -2k \leq 2$ 且 $OC > 1$, 即

$$\begin{cases} 1 < -2k \leq 2 \\ -\frac{2k}{\sqrt{k^2+1}} > 1 \end{cases}, \text{即可解得答案;}$$

(2) 分两种情况画出图形，找到“临界点”，列出不等式即可解得 m 范围。

【解答】解：(1) 根据“内二分点”的定义， $\odot O$ 的半径为 2 时， P 在 $\odot O$ 内， P' 在 $\odot O$ 外，

$$\therefore OP < 2, OP' > 2,$$

$$\therefore OP' = 2OP,$$

$$\therefore 1 < OP < 2;$$

① $\because P_1(-1, 0), P_2(1, \frac{3}{2}), P_3(\sqrt{2}, -1), P_4(-\sqrt{3}, -1),$

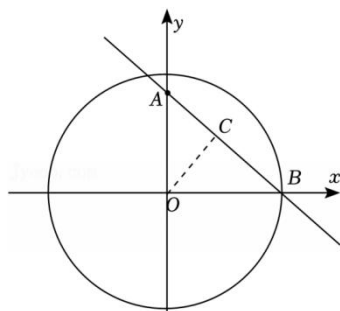
$$\therefore OP_1=1, OP_2=\frac{\sqrt{13}}{2}, OP_3=\sqrt{3}, OP_4=2,$$

$\therefore \odot O$ 的“内二分点”的是 P_2, P_3 ;

故答案为: P_2, P_3 ;

② 若 $k > 0$, 则 $y=kx-2k$ 在第一象限的图象是一条射线 (不含端点), 不可能所有点都是 $\odot O$ 的“内二分点”, 故 $k < 0$,

又 $x=2$ 时, $y=0$, 即直线 $y=kx-2k$ 过定点 $B(2, 0)$, 当 $x=0$ 时, $y=-2k$, 即直线 AB 过 $A(0, -2k)$, 过 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C , 如图:





由 $OB=2$, $OA=-2k$ 可得 $AB=2\sqrt{k^2+1}$,

而 $2S_{\triangle AOB}=OB \cdot OA=AB \cdot OC$ 可得 $OC=\frac{OB \cdot OA}{AB}=-\frac{2k}{\sqrt{k^2+1}}$,

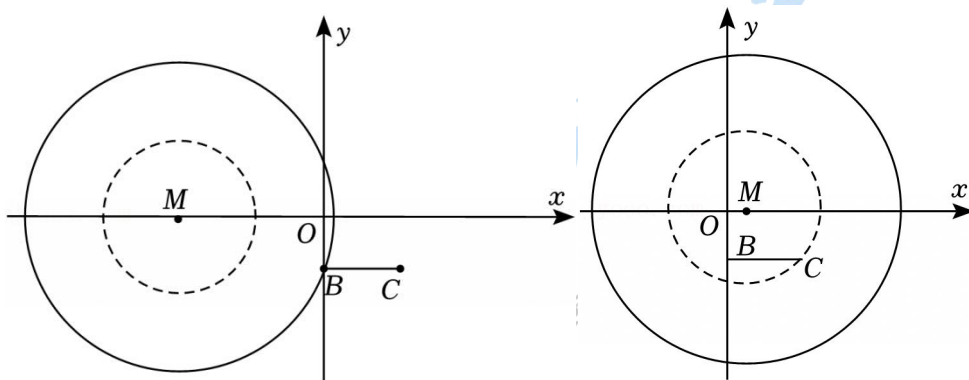
$\because$ 一次函数在第一象限的图象上的所有点都是 $\odot O$ 的“内二分点”，一次函数 $y=kx-2k$ 与 y 轴的交点是 $A(0, -2k)$,

$\therefore 1 < -2k \leq 2$ 且 $OC > 1$,

$$\therefore \begin{cases} 1 < -2k \leq 2 \\ -\frac{2k}{\sqrt{k^2+1}} > 1 \end{cases},$$

解得 $-1 \leq k < -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

(2) ①当 $\odot M$ 从 B 左侧沿 x 正方向移动时，线段 BC 上存在点 P 为 $\odot M$ 的“内二分点”，如图：



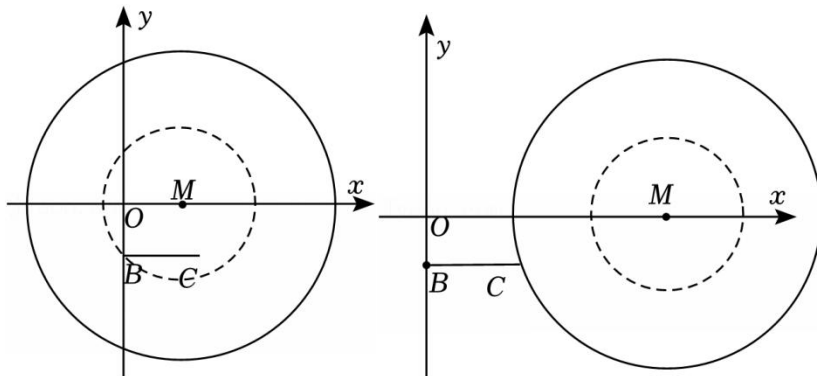
则满足 $BM < 4$ ，且 $CM > 2$ ，

$$\therefore \sqrt{m^2+1} < 4, \text{ 且 } \sqrt{(m-1)^2+1} > 2,$$

解得 $-\sqrt{15} < m < \sqrt{15}$ ，且 $m < 1-\sqrt{3}$ 或 $m > 1+\sqrt{3}$ ，

结合图形可得，此时线段 BC 上存在点 P 为 $\odot M$ 的“内二分点”， $-\sqrt{15} < m < 1-\sqrt{3}$ ；

②当 M 移动到 B 右侧，线段 BC 上存在点 P 为 $\odot M$ 的“内二分点”，如图：



则满足 $BM > 2$ ，且 $CM < 4$ ，



$$\therefore \sqrt{m^2 + 1} > 2, \text{ 且 } \sqrt{(m-1)^2 + 1} < 4,$$

$$\text{解得 } m < -\sqrt{3} \text{ 或 } m > \sqrt{3}, \text{ 且 } 1 - \sqrt{15} < m < 1 + \sqrt{15},$$

结合图形可得, 此时线段 BC 上存在点 P 为 $\odot M$ 的“内二分点”, $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{15}$,

综上所述, 线段 BC 上存在点 P 为 $\odot M$ 的“内二分点”, 则 $-\sqrt{15} < m < 1 - \sqrt{3}$ 或 $\sqrt{3} < m < 1 + \sqrt{15}$.

【点评】 本题考查圆的综合知识及新定义问题, 解题的关键是理解“内二分点”的定义, 找到“临界点”, 题目难度较大.

