



《二次函数》单元测试卷

一. 选择题（共 10 小题，共 30 分）

1. (3 分) 下列函数中, y 是 x 的二次函数的是 ()

A. $y = \frac{1}{x^2}$

B. $y = x^2 - 1$

C. $y = 3x + 1$

D. $y = (x - 1)^2 - x^2$

2. (3 分) 抛物线 $y = x^2$ 与 $y = -x^2$ 相同的性质是 ()

A. 开口向下

B. 对称轴是 y 轴

C. 有最低点

D. 对称轴是 x 轴

3. (3 分) 下列函数中, y 的值随 x 值的增大而减小的是 ()

A. $y = x^2 + 1$

B. $y = -x^2 + 1$

C. $y = 2x + 1$

D. $y = -2x + 1$

4. (3 分) 二次函数 $y = 2(x - 1)^2 + 3$ 的最小值是 ()

A. -1

B. 1

C. 2

D. 3

5. (3 分) 二次函数 $y = -(x + 3)^2 + 1$ 图象的顶点所在的象限是 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

6. (3 分) 对于抛物线 $y = -(x + 1)^2 + 3$, 下列结论正确的是 ()

A. 开口向上

B. 对称轴为直线 $x = 1$

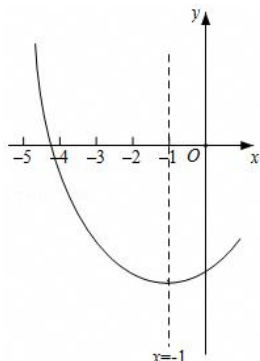
C. 顶点坐标为 $(-1, 3)$

D. 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大



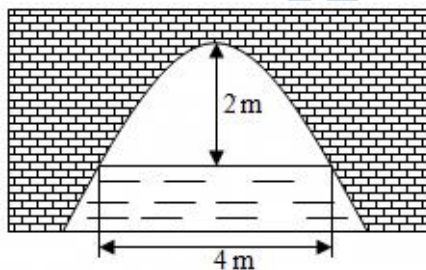
7. (3分) 小颖用计算器探索方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根, 她作出如图所示二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象, 并求得一个近似根为 $x=-4.3$, 则方程的另一个近似根为 () (精确到 0.1)

- A. $x=4.3$
B. $x=3.3$
C. $x=2.3$
D. $x=1.3$



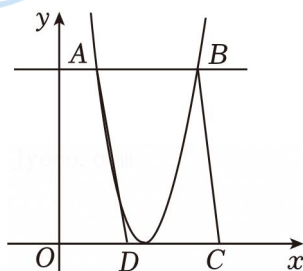
8. (3分) 如图是抛物线形的拱桥, 当水面宽 $4m$ 时, 顶点离水面 $2m$, 当水面宽度增加到 $6m$ 时, 水面下降 ()

- A. $1m$
B. $1.5m$
C. $2.5m$
D. $2m$



9. (3分) 如图, 抛物线 $y=a(x-4)^2$ 上的两点 A, B , 且 $AB \parallel x$ 轴, 直线 AB 与 y 轴交于 $(0, 8)$, x 轴上的有两点 $D(3, 0), C(7, 0)$, 且四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 则常数 a 的值为 ()

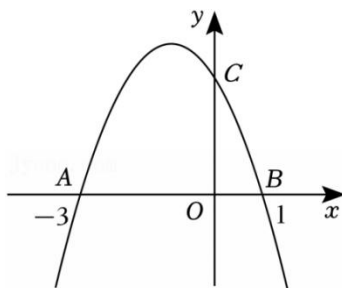
- A. 1
B. 1.5
C. 2
D. 3



10. (3分) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$, 与 y 轴交于点 C . 下列说法: ① $abc < 0$; ② 抛物线的对称轴为直线 $x=-1$; ③ 当 $-3 < x < 0$ 时, $ax^2+bx+c > 0$; ④ 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而增大; ⑤ $am^2+bm \leq a-b$ (m 为任意实数), 其中正确的个数是 ()



- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个



二. 填空题 (共 5 小题, 共 15 分)

11. (3 分) 将抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向上平移 3 个单位长度, 得到的抛物线是解析式为_____.

12. (3 分) 若抛物线 $y = x^2 - x + c$ (c 是常数) 与 x 轴没有交点, 则 c 的取值范围是_____.

13. (3 分) 在平面直角坐标系中, 将二次函数 $y = (x - 2024)(x - 2025) + 5$ 的图象向下平移 5 个单位长度, 所得抛物线与 x 轴有两个公共点 P 、 Q , 则 $PQ =$ _____.

14. (3 分) 火炮, 发明于中国, 是指利用机械能、化学能 (火药)、电磁能等能源抛射弹丸, 射程超过单兵武器射程, 由炮身和炮架两大部分组成的武器. 在某次训练中, 向上发射一枚炮弹, 经 x 秒后的高度为 y 米, 且 y 与 x 的关系式为 $y = ax^2 + bx$ ($a \neq 0$). 若此炮弹在第 5 秒和第 13 秒时的高度相等, 则此炮弹飞行第_____秒时的高度是最高的.



15. (3 分) 某段公路上汽车紧急刹车后前行的距离 s (单位: m) 关于行驶时间 t (单位: s) 的函数解析式是 $s = 30t - 5t^2$, 遇到刹车时, 汽车从刹车后到停下来前进了_____ m .

三. 解答题 (共 9 小题, 共 75 分)

16. (6 分) 已知函数 $y = -(m + 3)x^{m^2-7} - 2x + 1$ (m 为常数).

(1) 求当 m 为何值时 y 是 x 的二次函数;

(2) 在 (1) 的条件下, 点 $(2, a)$ 在此函数图象上, 求 a 的值.

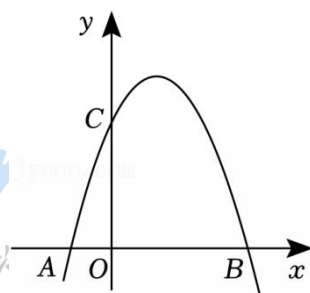


17. (6分) 已知抛物线 $y = x^2 - 6x - 3$.

- (1) 求该抛物线的对称轴;
- (2) 当 x 为何值时, y 随 x 的增大而减小?

18. (6分) 如图抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$.

- (1) 求抛物线的表达式及 C 点坐标;
- (2) 当 $y > 0$ 时, 求 x 的取值范围.

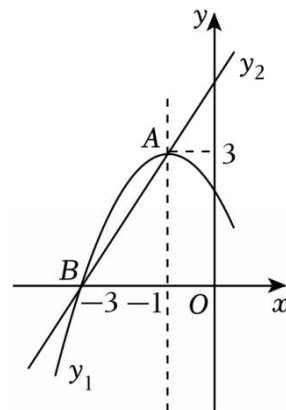


19. (8分) 已知关于 x 的二次函数的图象的顶点坐标为 $(-1, 2)$, 且图象过点 $(1, -3)$,

- (1) 求这个二次函数的关系式;
- (2) 写出它的开口方向、对称轴.

20. (8分) 如图, 已知抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 其顶点坐标为 $A(-1, 3)$, 抛物线与 x 轴的一个交点为 $B(-3, 0)$, 直线 $y_2 = mx + n (m \neq 0)$ 与抛物线交于 A, B 两点,

- (1) $2a - b =$ _____ ;
- (2) abc _____ 0;
- (3) 方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ 的根 _____ ;
- (4) 抛物线与 x 轴的另一个交点是 _____ ;
- (5) $a - b + c$ _____ 0;
- (6) 抛物线的解析式 _____ ;
- (7) $\Delta = b^2 - 4ac$ _____ 0.

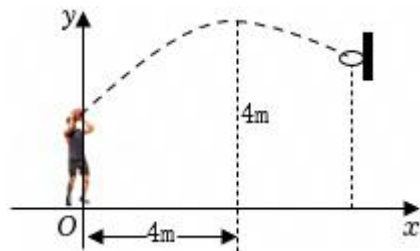




21. (8分) 某校初三年级的一场篮球比赛中, 如图队员甲正在投篮, 已知球出手时离地面高 $\frac{20}{9}m$, 当球出手后水平距离为 $4m$ 时到达最大高度 $4m$, 设篮球运行的轨迹为抛物线, 建立如图的平面直角坐标系.

(1) 求出抛物线的解析式;

(2) 若队员与篮圈中心的水平距离为 $7m$, 篮圈距地面 $3m$, 问此球能否准确投中?



22. (10分) 节假日期间, 全国各影院上映多部影片, 某影院每天运营成本为 2000 元, 该影院每天售出的电影票数量 y (单位: 张) 与售价 x (单位: 元/张) 之间满足一次函数关系 ($30 \leq x \leq 80$, 且 x 是整数), 部分数据如下表所示:

电影票售价 x (元/张)	40	50
售出电影票数量 y (张)	164	124

(1) 请求出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 设该影院每天的利润 (利润=票房收入-运营成本) 为 w (单位: 元), 求 w 与 x 之间的函数关系式;

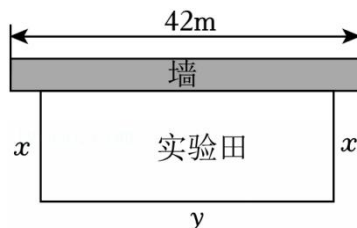
(3) 该影院将电影票售价 x 定为多少时, 每天获利最大? 最大利润是多少?

23. (11分) 如图, 某校劳动实践基地用总长为 $80m$ 的栅栏, 围成一块一边靠墙的矩形实验田, 墙长为 $42m$. 栅栏在安装过程中不重叠、无损耗, 设矩形实验田与墙垂直的一边长为 x (单位: m), 与墙平行的一边长为 y (单位: m), 面积为 S (单位: m^2).

(1) 直接写出 y 与 x , S 与 x 之间的函数解析式 (写 x 的取值范围);

(2) 矩形实验田的面积 S 能达到 $750m^2$ 吗? 如果能, 求 x 的值; 如果不能, 请说明理由;

(3) 当 x 的值是多少时, 矩形实验田的面积 S 最大? 最大面积是多少?



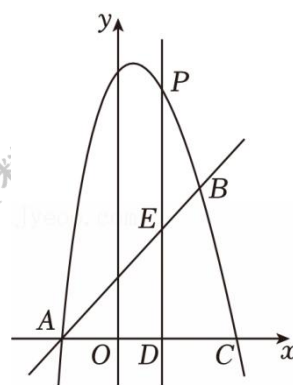


24. (12分) 如图, 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与直线 $y = x + 2$ 相交于 $A(-2, 0)$, $B(3, m)$ 两点, 与 x 轴相交于另一点 C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 点 P 是直线 AB 上方抛物线上的一个动点 (不与 A 、 B 重合), 过点 P 作直线 $PD \perp x$ 轴于点 D , 交直线 AB 于点 E , 当 $PE = 2ED$ 时, 求 P 点坐标;

(3) 抛物线上是否存在点 M 使 $\triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半? 若存在, 请直接写出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.





《二次函数》单元测试卷

参考答案与试题解析

一. 选择题 (共 10 小题, 共 30 分)

1. 【分析】根据二次函数的定义逐个判断即可.

【解答】解: A. 函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 不是二次函数, 故本选项不符合题意;

B. 函数 $y = x^2 - 1$ 是二次函数, 故本选项符合题意;

C. 函数 $y = 3x + 1$ 是一次函数, 不是二次函数, 故本选项不符合题意;

D. 函数 $y = (x - 1)^2 - x^2 = -2x + 1$ 是一次函数, 不是二次函数, 故本选项不符合题意;

故选: B.

【点评】本题考查了二次函数的定义, 能熟记二次函数的定义是解此题的关键, 形如 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) 的函数, 叫二次函数.

2. 【分析】根据二次函数的性质即可判断.

【解答】解: 抛物线 $y = x^2$ 的开口向上, 对称轴为 y 轴, 有最低点;

抛物线 $y = -x^2$ 开口向下, 对称轴为 y 轴, 有最高点;

故抛物线 $y = x^2$ 与 $y = -x^2$ 相同的性质是对称轴都是 y 轴,

故选: B.

【点评】本题考查了二次函数的性质, 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

3. 【分析】根据各函数解析式可得 y 随 x 的增大而减小时 x 的取值范围.

【解答】解: 选项 A 中, 函数 $y = x^2 + 1$, $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 故 A 不符合题意;

选项 B 中, 函数 $y = -x^2 + 1$, $x > 0$ 时, y 随 x 的增大而减小; 故 B 不符合题意;

选项 C 中, 函数 $y = 2x + 1$, y 随 x 的增大而增大; 故 C 不符合题意;

选项 D 中, 函数 $y = -2x + 1$, y 随 x 的增大而减小. 故 D 符合题意;

故选: D.

【点评】本题考查二次函数, 一次函数的性质, 解题关键是掌握二次函数, 一次函数图象与系数的关系.

4. 【分析】求二次函数的最大 (小) 值有三种方法, 第一种可由图象直接得出, 第二种是配方法, 第三种是公式法. 根据二次函数的解析式是顶点式, 即可得到结论.

【解答】解: 由二次函数 $a = 2 > 0$,

$\therefore$ 二次函数 $y = 2(x - 1)^2 + 3$ 的最小值是 3;

逐字研读题干 遇到困难回头看条件



故选：D.

【点评】本题考查了二次函数的最值，正确记忆相关知识点是解题关键.

5. 【分析】根据解析式求得顶点坐标，进而判断点所在的象限即可.

【解答】解：抛物线 $y = -(x+3)^2 + 1$ 的顶点坐标是 $(-3, 1)$ ，在第二象限，

故选：B.

【点评】本题考查了二次函数的性质，二次函数的图象，关键是掌握二次函数顶点式 $y = a(x-h)^2 + k$ 的顶点坐标为 (h, k) .

6. 【分析】根据抛物线的图象和性质依次进行判断即可.

【解答】解： $\because y = -(x+1)^2 + 3$ ，

故开口向下，选项 A 错误；

对称轴为直线 $x = -1$ ，选项 B 错误；

顶点坐标为 $(-1, 3)$ ，选项 C 正确；

当 $x > -1$ 时， y 随 x 的增大而减小，选项 D 错误.

故选 C.

【点评】本题主要考查抛物线的图象和性质，熟练掌握抛物线的图象是解题的关键.

7. 【分析】根据一元二次方程的一个近似根，得到抛物线与 x 轴的一个交点，根据抛物线的对称轴，求出另一个交点坐标，得到方程的另一个近似根.

【解答】解： $\because$ 抛物线与 x 轴的一个交点为 $(-4.3, 0)$ ，又抛物线的对称轴为： $x = -1$ ，

$\therefore$ 另一个交点坐标为： $(2.3, 0)$ ，

则方程的另一个近似根为 $x = 2.3$ ，

故选：C.

【点评】本题考查的是用图象法求一元二次方程的近似根，掌握二次函数的对称性和抛物线与 x 轴的交点与一元二次方程的解的关系是解题的关键.

8. 【分析】根据已知得出直角坐标系，进而求出二次函数解析式，再通过把 $x = -3$ 代入抛物线解析式得出水面宽度，即可得出答案.

【解答】解：建立平面直角坐标系，设横轴 x 通过 AB ，纵轴 y 通过 AB 中点 O 且通过 C 点，则通过画图可得知 O 为原点，

抛物线以 y 轴为对称轴，且经过 A, B 两点，可求出 OA 和 OB 为 AB 的一半 2 米，抛物线顶点 C 坐标为 $(0, 2)$ ，

设顶点式 $y = ax^2 + 2$ ，代入 A 点坐标 $(-2, 0)$ ，

逐字研读题干 遇到困难回头看条件



得: $a = -0.5$,

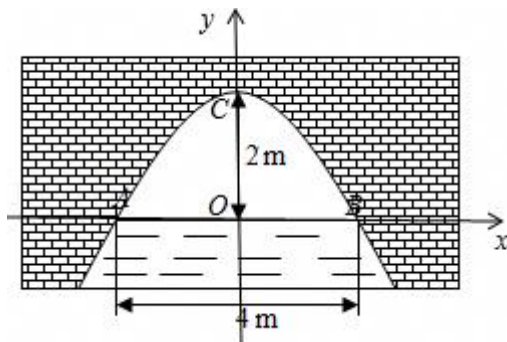
所以抛物线解析式为 $y = -0.5x^2 + 2$,

把 $x = -3$ 代入抛物线解析式得出:

$$y = -0.5 \times (-3)^2 + 2 = -2.5,$$

∴ 水面下降 2.5 米,

故选: C.



【点评】 此题主要考查了二次函数的应用, 根据已知建立坐标系从而得出二次函数解析式是解决问题的关键.

9. **【分析】** 先求得抛物线的对称轴为 $x = 4$, 再根据坐标与图形以及平行四边形的性质可得 $AB = CD = 4$, 根据二次函数图象的对称性可得点 A, B 的横坐标分别为: 2, 6; 然后确定点 A, B 的纵坐标, 最后将点 A 的坐标代入计算即可.

【解答】 解: ∵ $y = a(x - 4)^2$,

∴ 抛物线的对称轴为 $x = 4$,

∵ x 轴上的有两点 $D(3, 0), C(7, 0)$,

∴ $CD = 4$,

∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

∴ $AB = CD = 4$,

由二次函数的对称性可得: 点 A, B 的横坐标分别为: 2, 6,

∵ 直线 AB 与 y 轴交于 $(0, 8)$, $AB \parallel x$ 轴,

∴ 点 A, B 的纵坐标 8,

∴ 点 A, B 的坐标分别为 $(2, 8), (6, 8)$,

将点 $A(2, 8)$ 代入 $y = a(x - 4)^2$ 可得: $8 = a(2 - 4)^2$, 解得: $a = 2$.

故选: C.

【点评】 本题主要考查了求二次函数解析式、二次函数图象的性质、二次函数与几何的综合、平行四边形的性质等知识点, 求得点 A, B 的坐标成为解题的关键.

10. **【分析】** 根据抛物线的对称性即可求得对称轴, 即可判断②; 根据抛物线开口方向、对称轴, 与 y 轴的交点即可判断出①; 根据图象即可判断③④; 根据函数的最值即可判断出⑤.

【解答】 解: ∵ 抛物线开口向下,

∴ $a < 0$,

∵ 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-3, 0)$ 和点 $B(1, 0)$,

逐字研读题干 遇到困难回头看条件



∴对称轴为直线 $x = \frac{-3+1}{2} = -1$, 故②正确;

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a < 0,$$

∴与 y 轴的交点在正半轴上,

$$\therefore c > 0,$$

∴ $abc > 0$, 故①错误;

由图象可知, 当 $-3 < x < 0$ 时, $y > 0$,

∴当 $-3 < x < 0$ 时, $ax^2 + bx + c > 0$, 故③正确;

由图象可知, 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故④错误;

∴抛物线的对称轴为直线 $x = -1$,

∴当 $x = -1$ 时, 函数有最大值 $a - b + c$,

∴当 m 为任意实数时, $am^2 + bm + c \leq a - b + c$,

∴ $am^2 + bm \leq a - b$, 故⑤正确;

综上所述, 结论正确的是②③⑤共 3 个.

故选: C.

【点评】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点, 二次函数的性质, 主要利用了二次函数的开口方向, 对称轴, 最值问题, 以及二次函数图象上点的坐标特征, 数形结合是解题的关键.

二. 填空题 (共 5 小题, 共 15 分)

11. **【分析】** 根据向上平移纵坐标加求出平移后的抛物线的顶点坐标, 然后利用顶点式解析式写出即可.

【解答】 解: ∵抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 向上平移 3 个单位长度,

∴平移后的抛物线顶点坐标为 $(0, 3)$,

∴得到的抛物线是解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

故答案为: $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$.

【点评】 本题考查了二次函数图象与几何变换, 平移的规律: 左加右减, 上加下减, 此类题目, 利用顶点的变化求解更简便.

12. **【分析】** 依据题意, 由抛物线 $y = x^2 - x + c$ (c 是常数) 与 x 轴没有交点, 从而 $\Delta = 1 - 4c < 0$, 进而计算可以得解.

【解答】 解: 由题意, ∵抛物线 $y = x^2 - x + c$ (c 是常数) 与 x 轴没有交点,



$$\therefore \Delta = 1 - 4c < 0.$$

$$\therefore c > \frac{1}{4}.$$

故答案为: $c > \frac{1}{4}$.

【点评】 本题主要考查了抛物线与 x 轴的交点, 解题时要熟练掌握并能利用根的判别式来进行判断是关键.

13. **【分析】** 利用抛物线的平移规律得到平移后的抛物线解析式为 $y = (x - 2024)(x - 2025)$, 然后解方程 $x - 2024)(x - 2025) = 0$ 得到点 P 、 Q 的坐标, 从而得到 PQ 的长.

【解答】 解: 二次函数 $y = (x - 2024)(x - 2025) + 5$ 的图象向下平移 5 个单位长度所得抛物线解析式为 $y = (x - 2024)(x - 2025)$,

当 $y = 0$ 时, $(x - 2024)(x - 2025) = 0$,

解得 $x_1 = 2024$, $x_2 = 2025$,

$\therefore$ 点 P 、 Q 的坐标为 $(2024, 0)$, $(2025, 0)$,

$\therefore PQ = 2025 - 2024 = 1$.

故答案为: 1.

【点评】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点: 把求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标问题转化为解关于 x 的一元二次方程. 也考查了二次函数的性质和二次函数图象与几何变换.

14. **【分析】** 根据二次函数的图象和性质得到其在 $\frac{5+13}{2}$ 秒时的高度是最高, 即可解题.

【解答】 解: $\because$ 此炮弹在第 5 秒和第 13 秒时的高度相等,

$\therefore$ 由对称性可知, 此炮弹飞行第 $\frac{5+13}{2} = 9$ 秒时的高度是最高的.

故答案为: 9.

【点评】 本题考查二次函数的最值, 以及二次函数的对称性, 解题的关键是掌握相关知识的灵活运用.

15. **【分析】** 根据二次函数的解析式找出其顶点式, 再利用二次函数的性质求出 s 的最大值即可得出结论.

【解答】 解: $\because s = -5t^2 + 30t = -5(t - 3)^2 + 45$,

$\therefore$ 汽车刹车后到停下来前进了 45m,

故答案为: 45.

【点评】 本题考查了二次函数的应用, 利用配方法, 求出二次函数的顶点式是解题的关键.

三. 解答题 (共 9 小题, 共 75 分)

16. **【分析】** (1) 根据二次函数的定义即可求解;



(2) 根据 (1) 得出二次函数的解析式, 再把点 $(2, a)$ 代入计算即可求解.

【解答】解: (1) 解: 由题意得, $m^2 - 7 = 2$ 且 $m+3 \neq 0$,

解得 $m=3$,

$\therefore$ 当 $m=3$ 时 y 是 x 的二次函数;

(2) $\because m=3$,

$\therefore y = -6x^2 - 2x + 1$,

$\because$ 点 $(2, a)$ 在此函数图象上,

$\therefore a = -6 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = -27$.

【点评】 本题考查了二次函数的定义, 二次函数图象上点的坐标特征, 掌握二次函数的定义是解题的关键.

17. **【分析】** (1) 化成顶点式后确定对称轴即可;

(2) 根据抛物线的性质解答即可.

【解答】 解: (1) $\because y = x^2 - 6x - 3 = (x - 3)^2 - 12$,

$\therefore$ 该抛物线的对称轴为直线 $x=3$;

(2) 由 (1) 可得抛物线开口向上, 对称轴为直线 $x=3$,

$\therefore x < 3$ (或 $x \leq 3$) 时, y 随 x 的增大而减小.

【点评】 本题考查了解析式的顶点式, 对称轴, 增减性, 熟练掌握抛物线的性质是解题的关键.

18. **【分析】** (1) 由题意抛物线的解析式为 $y = -(x+1)(x-3)$ 由此可得结论;

(2) 利用图象法判断即可.

【解答】 解: (1) 由题意抛物线的解析式为 $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$,

令 $x=0$, $y=3$,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, 3)$;

(2) 观察图象可知当 $y > 0$ 时, $-1 < x < 3$.

【点评】 本题主要考查抛物线与 x 轴的交点, 二次函数的性质, 二次函数图象上的点的坐标特征, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题.

19. **【分析】** 直接设顶点式, 再用待定系数法求二次函数的解析式. 进而可根据函数的解析式求得抛物线的开口方向和对称轴方程.

【解答】 解: (1) 设函数解析式为 $y = a(x-h)^2 + k$, 把顶点和点 $(1, -3)$ 代入解析式, 得:

$a = -\frac{5}{4}$, 所以抛物线的解析式为: $y = -\frac{5}{4}(x+1)^2 + 2$;



(2) 由 (1) 的函数解析式可得：抛物线的开口向下，对称轴为直线 $x = -1$ 。

【点评】主要考查待定系数法求二次函数的解析式。当知道二次函数的顶点坐标时通常使用二次函数的顶点式来求解析式。

20. 【分析】(1) 由抛物线图象可得抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ，从而得出 $-\frac{b}{2a} = -1$ ，即 $b = 2a$ ，即可得解；

(2) 由抛物线图象可得抛物线开口向下，与 y 轴交于正半轴，得出 $a < 0$ ， $c > 0$ ，结合 $b = 2a < 0$ ，即可得解；

(3) 由抛物线图象即可得出答案；

(4) 根据抛物线的对称性即可得出答案；

(5) 由抛物线函数图象即可得出答案；

(6) 利用待定系数法计算即可得解；

(7) 根据抛物线与 x 轴有两个交点即可得解。

【解答】解：(1) 由抛物线图象可得：抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ，

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a,$$

$$\therefore 2a - b = 0;$$

(2) 由抛物线图象可得：抛物线开口向下，与 y 轴交于正半轴，

$$\therefore a < 0, c > 0,$$

$$\therefore b = 2a < 0,$$

$$\therefore abc > 0;$$

(3) $\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c - 3 = 0$ ，即 $ax^2 + bx + c = 3$ 的根为： $x_1 = x_2 = -1$ ；

(4) $\therefore$ 抛物线与 x 轴的一个交点为 $B(-3, 0)$ ，抛物线的对称轴为直线 $x = -1$ ，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(1, 0)$ ；

(5) 由抛物线图象可得，当 $x = -1$ 时， $a - b + c = 3 > 0$ ；

(6) $\therefore$ 抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，其顶点坐标为 $A(-1, 3)$ ，

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y_1 = a(x + 1)^2 + 3$ ，

将 $B(-3, 0)$ 代入抛物线解析式得 $a(-3 + 1)^2 + 3 = 0$ ，

$$\text{解得：} a = -\frac{3}{4},$$



∴ 抛物线的解析式为 $y_1 = -\frac{3}{4}(x+1)^2 + 3$;

(7) 由抛物线的图象可得, 抛物线与 x 轴有两个交点,

∴ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

【点评】 本题考查了二次函数的图象与性质、待定系数法求二次函数解析式, 采用数形结合的思想是解此题的关键.

21. **【分析】** (1) 根据抛物线的顶点坐标及球出手时的坐标, 设抛物线的解析式为 $y = a(x-4)^2 + 4$, 根据待定系数法求出抛物线解析式即可;

(2) 令 $x=7$, 求出 y 的值, 得出点的坐标, 进而即可作出判断.

【解答】 解: (1) 根据题意结合图形可得, 球出手时的坐标为 $(0, \frac{20}{9})$, 抛物线的顶点坐标为 $(4, 4)$, 设抛物线解析式为: $y = a(x-4)^2 + 4$,

将点 $(0, \frac{20}{9})$ 代入 $y = a(x-4)^2 + 4$ 可得:

$$\frac{20}{9} = 16a + 4,$$

$$\therefore a = -\frac{1}{9},$$

则抛物线的解析式为: $y = -\frac{1}{9}(x-4)^2 + 4$;

(2) 令 $x=7$, 则 $y = -\frac{1}{9} \times 9 + 4 = 3$,

即点 $(7, 3)$ 在抛物线上,

所以此球能准确投中.

【点评】 本题考查了二次函数的应用, 解答本题的关键是利用待定系数法求出抛物线解析式.

22. **【分析】** (1) 根据题意和表格中的数据, 可以计算出 y 与 x 之间的函数关系式;

(2) 根据利润 = 票房收入 - 运营成本和 (1) 中的结果, 可以写出 w 与 x 之间的函数关系式;

(3) 将 (2) 中的函数解析式化为顶点式, 再根据二次函数的性质和 x 的取值范围, 可以求得该影院将电影票售价 x 定为多少时, 每天获利最大, 最大利润是多少.

【解答】 解: (1) 设 y 与 x 之间的函数关系式是 $y = kx + b$,

$$\text{由表格可得, } \begin{cases} 40k + b = 164 \\ 50k + b = 124 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -4 \\ b = 324 \end{cases},$$

即 y 与 x 之间的函数关系式是 $y = -4x + 324$ ($30 \leq x \leq 80$, 且 x 是整数);

(2) 由题意可得,



$$w = x(-4x + 324) - 2000 = -4x^2 + 324x - 2000,$$

即 w 与 x 之间的函数关系式是 $w = -4x^2 + 324x - 2000$ ($30 \leq x \leq 80$);

$$(3) \text{ 由 (2) 知: } w = -4x^2 + 324x - 2000 = -4\left(x - \frac{81}{2}\right)^2 + 4561,$$

$\because 30 \leq x \leq 80$, 且 x 是整数,

$\therefore$ 当 $x = 40$ 或 41 时, w 取得最大值, 此时 $w = 4560$,

答: 该影院将电影票售价 x 定为 40 元或 41 元时, 每天获利最大, 最大利润是 4560 元.

【点评】 本题考查二次函数的应用、待定系数法求一次函数解析式, 解答本题的关键是明确题意, 求出相应的函数解析式, 利用二次函数的性质求最值.

23. **【分析】** (1) 根据 $2x + y = 80$, 求出 y 与 x 的函数解析式, 根据矩形面积公式求出 S 与 x 的函数解析式;

(2) 先求出 x 的取值范围, 再将 $S = 750$ 代入函数中, 求出 x 的值;

(3) 将 S 与 x 的函数配成顶点式, 求出 S 的最大值.

【解答】 解: (1) 由劳动实践基地用总长为 $80m$ 的栅栏, 围成一块一边靠墙的矩形实验田可得:

$$2x + y = 80,$$

$$\therefore y = -2x + 80,$$

$$\therefore S = xy,$$

$$\therefore S = x(-2x + 80) = -2x^2 + 80x;$$

$$\therefore y \leq 42,$$

$$\therefore -2x + 80 \leq 42,$$

$$\therefore x \geq 19,$$

$$\therefore 19 \leq x < 40;$$

$$(2) \text{ 当 } S = 750 \text{ 时, } -2x^2 + 80x = 750,$$

$$x^2 - 40x + 375 = 0,$$

$$(x - 25)(x - 15) = 0,$$

$$\therefore x = 25 \text{ 或 } x = 15 \text{ (舍去)},$$

$\therefore$ 当 $x = 25m$ 时, 矩形实验田的面积 S 能达到 $750m^2$;

(3) 将函数解析式化为顶点式可得:

$$S = -2x^2 + 80x = -2(x^2 - 40x) = -2(x^2 - 40x + 400 - 400) = -2(x - 20)^2 + 800,$$

$\therefore$ 当 $x = 20m$ 时, S 有最大值 $800m^2$.

【点评】 本题考查二次函数的应用, 计算 x 的取值范围是解题的关键.



24. 【分析】(1) 把 $B(3, m)$ 代入 $y=x+2$ 求出 $B(3, 5)$, 再用待定系数法可得抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+8$;

(2) 设 $P(t, -t^2+2t+8)$, 则 $E(t, t+2)$, $D(t, 0)$, 由 $PE=2DE$, 可得 $-t^2+2t+8-(t+2)=2(t+2)$, 解出 t 的值可得 P 的坐标为 $(1, 9)$;

(3) 过 M 作 $MK \parallel y$ 轴交直线 AB 于 K , 求出 $C(4, 0)$, 知 $AC=6$, 故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times 6 \times 5=15$, 设 $M(m, -m^2+2m+8)$, 则 $K(m, m+2)$, 可得 $MK=|-m^2+2m+8-(m+2)|=|-m^2+m+6|$, $S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}MK \cdot |x_B-x_A|=\frac{5}{2}|-m^2+m+6|$, 根据 $\triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半, 有 $\frac{5}{2}|-m^2+m+6|=\frac{1}{2} \times 15$, 可得 $|-m^2+m+6|=3$, 即 $-m^2+m+6=3$ 或 $-m^2+m+6=-3$, 解出 m 的值可得答案.

【解答】解: (1) 把 $B(3, m)$ 代入 $y=x+2$ 得: $m=3+2=5$,

$\therefore B(3, 5)$,

把 $A(-2, 0)$, $B(3, 5)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$ 得:

$$\begin{cases} -4-2b+c=0 \\ -9+3b+c=5 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=2 \\ c=8 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+8$;

(2) 设 $P(t, -t^2+2t+8)$, 则 $E(t, t+2)$, $D(t, 0)$,

$\because PE=2DE$,

$\therefore -t^2+2t+8-(t+2)=2(t+2)$,

解得 $t=1$ 或 $t=-2$ (此时 P 不在直线 AB 上方, 舍去);

$\therefore P$ 的坐标为 $(1, 9)$;

(3) 抛物线上存在点 M , 使 $\triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半, 理由如下:

过 M 作 $MK \parallel y$ 轴交直线 AB 于 K , 如图:

在 $y=-x^2+2x+8$ 中, 令 $y=0$ 得 $0=-x^2+2x+8$,

解得 $x=-2$ 或 $x=4$,

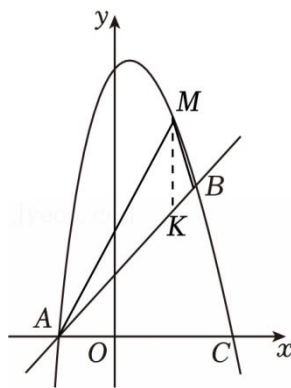
$\therefore A(-2, 0)$, $C(4, 0)$,

$\therefore AC=6$,

$\because B(3, 5)$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times 6 \times 5=15$,

设 $M(m, -m^2+2m+8)$, 则 $K(m, m+2)$,





$$\therefore MK = |-m^2 + 2m + 8 - (m+2)| = |-m^2 + m + 6|,$$

$$\therefore S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} MK \cdot |x_B - x_A| = \frac{1}{2} |-m^2 + m + 6| \times 5 = \frac{5}{2} |-m^2 + m + 6|,$$

$\therefore \triangle ABM$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半,

$$\therefore \frac{5}{2} |-m^2 + m + 6| = \frac{1}{2} \times 15,$$

$$\therefore |-m^2 + m + 6| = 3,$$

$$\therefore -m^2 + m + 6 = 3 \text{ 或 } -m^2 + m + 6 = -3,$$

$$\text{解得 } m = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ 或 } m = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2},$$

$$\therefore M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}, \frac{11+\sqrt{13}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{11-\sqrt{13}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{1+\sqrt{37}}{2}, \frac{-1+\sqrt{37}}{2} \right) \text{ 或 } \left(\frac{1-\sqrt{37}}{2}, \frac{-1-\sqrt{37}}{2} \right).$$

【点评】 本题考查二次函数综合应用，涉及待定系数法，三角形面积等知识，解题的关键是用含字母的式子表示相关点坐标和相关线段的长度.