



锐角三角函数知识讲解

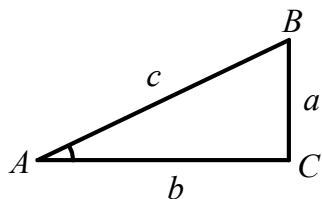
【学习目标】

1. 结合图形理解记忆锐角三角函数定义；
2. 会推算 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值，并熟练准确的记住特殊角的三角函数值；
3. 理解并能熟练运用“同角三角函数的关系”及“锐角三角函数值随角度变化的规律”。

【要点梳理】

要点一、锐角三角函数的概念

如图所示，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ， $\angle A$ 所对的边 BC 记为 a ，叫做 $\angle A$ 的对边，也叫做 $\angle B$ 的邻边， $\angle B$ 所对的边 AC 记为 b ，叫做 $\angle B$ 的对边，也是 $\angle A$ 的邻边，直角 C 所对的边 AB 记为 c ，叫做斜边。



锐角 A 的对边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，记作 $\sin A$ ，即 $\sin A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$ ；

锐角 A 的邻边与斜边的比叫做 $\angle A$ 的余弦，记作 $\cos A$ ，即 $\cos A = \frac{\angle A \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$ ；

锐角 A 的对边与邻边的比叫做 $\angle A$ 的正切，记作 $\tan A$ ，即 $\tan A = \frac{\angle A \text{ 的对边}}{\angle A \text{ 的邻边}} = \frac{a}{b}$ 。

同理 $\sin B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\text{斜边}} = \frac{b}{c}$ ； $\cos B = \frac{\angle B \text{ 的邻边}}{\text{斜边}} = \frac{a}{c}$ ； $\tan B = \frac{\angle B \text{ 的对边}}{\angle B \text{ 的邻边}} = \frac{b}{a}$ 。

要点诠释：

(1) 正弦、余弦、正切函数是在直角三角形中定义的，反映了直角三角形边与角的关系，是两条线段的比值。角的度数确定时，其比值不变，角的度数变化时，比值也随之变化。

(2) $\sin A$ ， $\cos A$ ， $\tan A$ 分别是一个完整的数学符号，是一个整体，不能写成 $\sin \cdot A$ ， $\cos \cdot A$ ，

$\tan \cdot A$ ，不能理解成 $\sin$ 与 $\angle A$ ， $\cos$ 与 $\angle A$ ， $\tan$ 与 $\angle A$ 的乘积。书写时习惯上省略 $\angle A$ 的角的记号“ $\angle$ ”，但对三个大写字母表示成的角(如 $\angle AEF$)，其正切应写成“ $\tan \angle AEF$ ”，不能写成

“ $\tan AEF$ ”；另外， $(\sin A)^2$ 、 $(\cos A)^2$ 、 $(\tan A)^2$ 常写成 $\sin^2 A$ 、 $\cos^2 A$ 、 $\tan^2 A$ 。

(3) 任何一个锐角都有相应的锐角三角函数值，不因这个角不在某个三角形中而不存在。



(4) 由锐角三角函数的定义知:

当角度在 $0^\circ < \angle A < 90^\circ$ 间变化时, $0 < \sin A < 1$, $0 < \cos A < 1$, $\tan A > 0$.

要点二、特殊角的三角函数值

利用三角函数的定义, 可求出 30° 、 45° 、 60° 角的各三角函数值, 归纳如下:

锐角 α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

要点诠释:

(1) 通过该表可以方便地知道 30° 、 45° 、 60° 角的各三角函数值, 它的另一个应用就是: 如果知道了
一个锐角的三角函数值, 就可以求出这个锐角的度数, 例如: 若 $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则锐角 $\theta = 45^\circ$.

(2) 仔细研究表中数值的规律会发现:

$\sin 30^\circ$ 、 $\sin 45^\circ$ 、 $\sin 60^\circ$ 的值依次为 $\frac{\sqrt{1}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 而 $\cos 30^\circ$ 、 $\cos 45^\circ$ 、 $\cos 60^\circ$ 的值的顺

序正好相反, $\tan 30^\circ$ 、 $\tan 45^\circ$ 、 $\tan 60^\circ$ 的值依次增大, 其变化规律可以总结为:

① 正弦、正切值随锐角度数的增大(或减小)而增大(或减小);

② 余弦值随锐角度数的增大(或减小)而减小(或增大).

要点三、锐角三角函数之间的关系

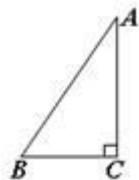
如图所示, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$.

(1) 互余关系: $\sin A = \cos(90^\circ - \angle A) = \cos B$, $\cos A = \sin(90^\circ - \angle A) = \sin B$;

(2) 平方关系: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$;

(3) 倒数关系: $\tan A \cdot \tan(90^\circ - \angle A) = 1$ 或 $\tan A = \frac{1}{\tan B}$;

(4) 商数关系: $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.



要点诠释:

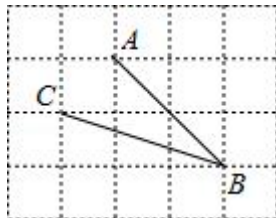
锐角三角函数之间的关系式可由锐角三角函数的意义推导得出, 常应用在三角函数的计算中, 计算时巧用这些关系式可使运算简便.



【典型例题】

类型一、锐角三角函数值的求解策略

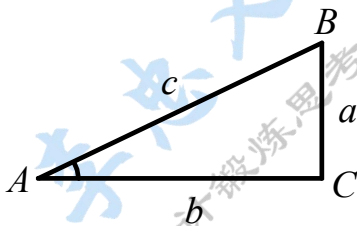
1. 如图，在网格中，小正方形的边长均为 1，点 A, B, C 都在格点上，则 $\angle ABC$ 的正切值是 ()



- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

【变式】在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $a = 3$ ， $b = 4$ ，则 $c =$ _____，

$\sin A =$ _____， $\cos A =$ _____， $\sin B =$ _____， $\cos B =$ _____.



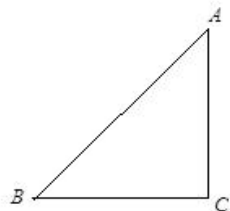
类型二、特殊角的三角函数值的计算

2. 求下列各式的值：

- (1) $6\tan^2 30^\circ - \sqrt{3}\sin 60^\circ - 2\sin 45^\circ$;
- (2) $\sqrt{2}\sin 60^\circ - 4\cos^2 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \tan 60^\circ$;
- (3) $\frac{\sin 60^\circ}{\cos^2 60^\circ} + \tan 60^\circ - \frac{2}{2\cos 45^\circ + \tan 60^\circ}$.

【变式】在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，若 $\angle A = 45^\circ$ ，则 $\angle B =$ _____，

$\sin A =$ _____， $\cos A =$ _____， $\sin B =$ _____， $\cos B =$ _____.





类型三、锐角三角函数之间的关系

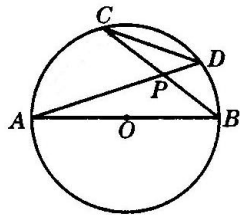
3. 已知 $\triangle ABC$ 中的 $\angle A$ 与 $\angle B$ 满足 $(1 - \tan A)^2 + |\sin B - \frac{\sqrt{3}}{2}| = 0$

(1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

(2) 求 $(1 + \sin A)^2 - 2\sqrt{\cos B} - (3 + \tan C)^0$ 的值.

类型四、锐角三角函数的拓展探究与应用

4. 如图所示, AB 是 $\odot O$ 的直径, 且 $AB=10$, CD 是 $\odot O$ 的弦, AD 与 BC 相交于点 P , 若弦 $CD=6$, 试求 $\cos \angle APC$ 的值.



5. 通过学习三角函数, 我们知道在直角三角形中, 一个锐角的大小与两条边长的比值相互唯一确定, 因此边长与角的大小之间可以相互转化. 类似的, 可以在等腰三角形中建立边角之间的联系. 我们定义: 等腰三角形中底边与腰的比叫做顶角的正对(sad). 如图1①, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, 顶角 A 的正对记作 $\text{sad}A$,

这时 $\text{sad}A = \frac{\text{底边}}{\text{腰}} = \frac{BC}{AB}$. 容易知道一个角的大小与这个角的正对值也是相互唯一确定的. 根据上述角的

正对定义, 解下列问题:

(1) $\text{sad}60^\circ =$ _____.

(2) 对于 $0 < A < 180^\circ$, $\angle A$ 的正对值 $\text{sad}A$ 的取值范围是_____.

(3) 如图1②, 已知 $\sin A = \frac{3}{5}$, 其中 $\angle A$ 为锐角, 试求 $\text{sad}A$ 的值.

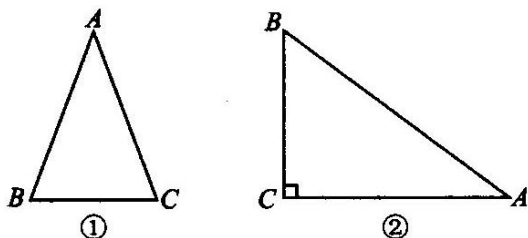


图 1



锐角三角函数知识讲解

类型一、锐角三角函数值的求解策略

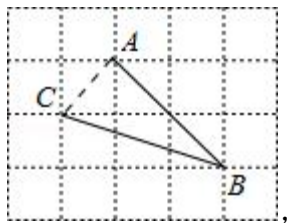
1.

【思路点拨】根据勾股定理，可得 AC、AB 的长，根据正切函数的定义，可得答案.

【答案】D.

【解析】

解：如图：



由勾股定理，得

$$AC=\sqrt{2}, AB=2\sqrt{2}, BC=\sqrt{10},$$

∴△ABC 为直角三角形，

$$\therefore \tan \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2},$$

故选：D.

【总结升华】本题考查了锐角三角函数的定义，先求出 AC、AB 的长，再求正切函数.

【变式】【答案】 $c = 5$, $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\sin B = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{3}{5}$.

类型二、特殊角的三角函数值的计算

2.

【答案与解析】

$$\begin{aligned} \text{解：(1) 原式} &= 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) 原式} &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} - 3 + \frac{\sqrt{6}}{2} \\ &= \sqrt{6} - 3; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 原式} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{1}{2})^2 + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \\
 &= 2\sqrt{3} + \sqrt{3} - \frac{2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\
 &= 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} \\
 &= \sqrt{3} + 2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

【总结升华】熟记特殊角的三角函数值或借助两个三角板推算三角函数值，先代入特殊角的三角函数值，再进行化简。

【变式】【答案】 $\angle B = 45^\circ$, $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

类型三、锐角三角函数之间的关系

3.

【答案与解析】

解：(1) $\because |1 - \tan A|^2 + |\sin B - \frac{\sqrt{3}}{2}| = 0$,

$$\therefore \tan A = 1, \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \angle A = 45^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ,$$

$\therefore \triangle ABC$ 是锐角三角形；

(2) $\because \angle A = 45^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$,

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{原式} &= (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - 2\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

【总结升华】本题考查的是特殊角的三角函数值，熟记各特殊角度的三角函数值是解答此题的关键。

类型四、锐角三角函数的拓展探究与应用

4.

【答案与解析】

连结 AC, $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACP = 90^\circ$,

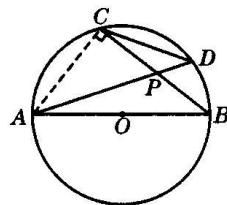
又 $\because \angle B = \angle D, \angle PAB = \angle PCD, \therefore \triangle PCD \sim \triangle PAB$,

$$\therefore \frac{PC}{PA} = \frac{CD}{AB}.$$

又 $\because CD = 6, AB = 10$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle PAC$ 中,

$$\cos \angle APC = \frac{PC}{PA} = \frac{CD}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$



【总结升华】直角三角形中，锐角的三角函数等于两边的比值，当这个比值无法直接求解，可结合相似三



角形的性质，利用对应线段成比例转换，间接地求出这个比值。

锐角的三角函数是针对直角三角形而言的，故可连结 AC ，由 AB 是 $\odot O$ 的直径得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\cos \angle APC = \frac{PC}{PA}$ ， PC 、 PA 均为未知，而已知 $CD=6$ ， $AB=10$ ，可考虑利用 $\triangle PCD \sim \triangle PAB$ 得 $\frac{PC}{PA} = \frac{CD}{AB}$ 。

5.

【答案与解析】

(1) 1; (2) $0 < \text{sad} A < 2$;

(3) 如图 2 所示，延长 AC 到 D ，使 $AD=AB$ ，连接 BD 。

设 $AD=AB=5a$ ，由 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$ 得 $BC=3a$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{(5a)^2 - (3a)^2} = 4a,$$

$$\therefore CD = 5a - 4a = a, \quad BD = \sqrt{a^2 + (3a)^2} = \sqrt{10}a,$$

$$\therefore \text{sad} A = \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

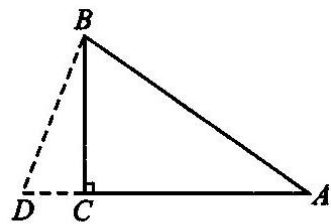


图 2

【总结升华】(1) 将 60° 角放在等腰三角形中，底边和腰相等，故 $\text{sad} A = 1$ ；(2) 在图①中设想 $AB=AC$ 的长固定，并固定 AB 让 AC 绕点 A 旋转，当 $\angle A$ 接近 0° 时， BC 接近 0，则 $\text{sad} A$ 接近 0 但永远不会等于 0，故 $\text{sad} A > 0$ ，当 $\angle A$ 接近 180° 时， BC 接近 $2AB$ ，则 $\text{sad} A$ 接近 2 但小于 2，故 $\text{sad} A < 2$ ；(3) 将 $\angle A$ 放到等腰三角形中，如图 2 所示，根据定义可求解。