

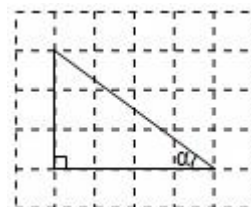


三角函数单元测试卷

一、选择题

1. (4分) 三角形在正方形网格纸中的位置如图所示, 则 $\sin\alpha$ 的值是 ()

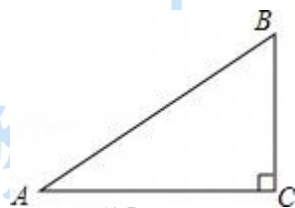
- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{5}$



2. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A = 1$, $\cos B = \frac{1}{2}$, 则 $\angle C$ 的度数是 ()

- A. 75° B. 60° C. 45° D. 105°

3. (4分) 如图, 为了测楼房 BC 的高, 在距离楼房 10 米的 A 处, 测得楼顶 B 的仰角为 α , 那么楼房 BC 的高为 () 米.

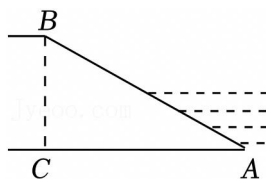


- A. $\frac{10}{\sin\alpha}$ B. $\frac{10}{\tan\alpha}$ C. $10\sin\alpha$ D. $10\tan\alpha$

4. (4分) 计算 $6\tan 45^\circ - 2\cos 60^\circ$ 的结果是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

5. (4分) 河堤横断面如图所示, $BC = 5$ 米, 迎水坡 AB 的坡度是 1:2 (坡度是坡面的铅直高度 BC 与水平宽度 AC 之比), 则 AC 的长为 ()



- A. $5\sqrt{3}$ 米 B. $10\sqrt{3}$ 米 C. 15 米 D. 10 米



6. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 把 $\angle A$ 的邻边与对边的比叫做 $\angle A$ 的余切, 记作

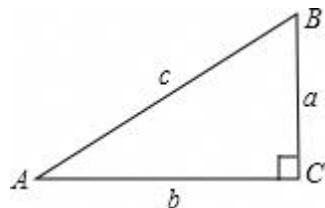
$\cot A = \frac{b}{a}$. 则下列关系式中不成立的是 ()

A. $\tan A \cdot \cot A = 1$

B. $\sin A = \tan A \cdot \cos A$

C. $\cos A = \cot A \cdot \sin A$

D. $\tan^2 A + \cot^2 A = 1$



7. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A=120^\circ$, $AB=4$, $AC=2$, 则 $\sin B$ 的值是 ()

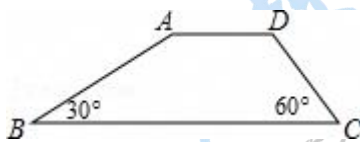
A. $\frac{5\sqrt{7}}{14}$

B. $\frac{\sqrt{21}}{14}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

8. (4分) 如图, 四边形 $ABCD$ 为梯形, $AD \parallel BC$, $\angle ABC=30^\circ$, $\angle BCD=60^\circ$, $AD=4$, $AB=3\sqrt{3}$, 则下底 BC 的长为 ()



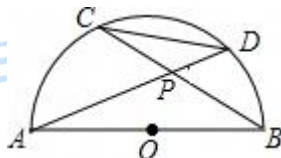
A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

9. (4分) 已知如图, AB 是半圆 O 的直径, 弦 AD 、 BC 相交于点 P , 那么 $\frac{CD}{AB}$ 等于 $\angle BPD$ 的 ()



A. 正弦

B. 余弦

C. 正切

D. 以上都不对

10. (4分) 因为 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, 所以 $\sin 210^\circ = \sin (180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$; 因为 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\sin 225^\circ = \sin (180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$, 由此猜想, 推理知: 一般地当 α 为锐角时有 $\sin (180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, 由此可知: $\sin 240^\circ =$ ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

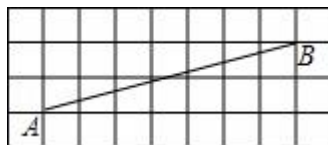
D. $-\sqrt{3}$



二、填空题

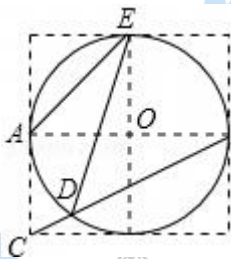
11. (5分) 已知 $\angle B$ 是锐角, 若 $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, 则 $\tan B$ 的值为_____.

12. (5分) 如图, 正方形网格中每个小正方形的边长为1, 网格上线段 AB 表示一个斜坡, 则这个斜坡的坡度是_____.

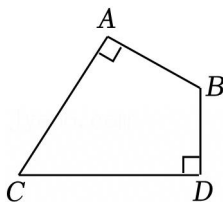


13. (5分) 计算: $2\sin 30^\circ - \sqrt{16} =$ _____.

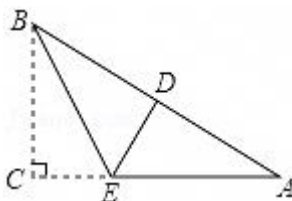
14. (5分) 如图, 边长为1的小正方形网格中, $\odot O$ 的圆心在格点上, 则 $\angle AED$ 的正弦值是_____.



15. (5分) 如图, 一块四边形土地, 其中, $\angle ABD = 120^\circ$, $AB \perp AC$, $BD \perp CD$, $AB = 30m$, $CD = 50m$, 则这块土地的面积为 _____ m^2 .



16. (5分) 如图, 在三角形纸片 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, 折叠该纸片, 使点 C 落在 AB 边上的 D 点处, 折痕 BE 与 AC 交于点 E , 若 $AD = BD$, 则折痕 BE 的长为_____.





三、解答题

17. (8分) 求下列各式的值.

(1) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$;

(2) $\sin^2 45^\circ + \tan 30^\circ \cos 30^\circ$;

(3) $2\sin^2 60^\circ - \sqrt{3}\tan 30^\circ - 2\cos^2 45^\circ - \frac{2\sin 30^\circ}{4\cos 60^\circ - 1}$.

18. (8分) 已知 α 是锐角, 且 $\sin(\alpha + 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 计算: $\sqrt{8} - 4\cos\alpha - (\pi - 3.14)^0 + \tan\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 的值.

19. (8分) 计算, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$.

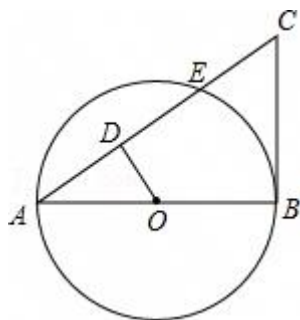
(1) 已知 $c = 8$, $\angle A = 60^\circ$, 求 $\angle B$, a , b ;

(2) 已知 $a = 3$, $\angle A = 30^\circ$, 求 $\angle B$, b , c .

20. (8分) 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, BC 为 $\odot O$ 的切线, AC 交 $\odot O$ 于点 E , D 为 AC 上一点, $\angle AOD = \angle C$.

(1) 求证: $OD \perp AC$;

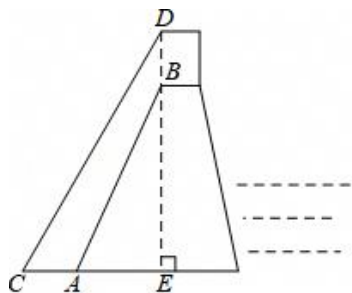
(2) 若 $AE = 8$, $AB = 10$, 求 OD 的长.





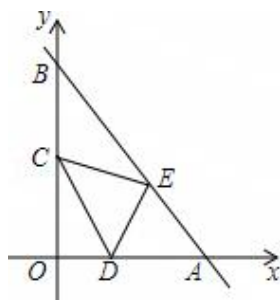
21. (10 分) 我国南水北调中线工程的起点是丹江水库, 按照工程计划, 需对原水库大坝进

行混凝土培厚加高, 使坝高由原来的 162 米增加到 176.6 米, 以抬高蓄水位. 如图是某一段坝体加高工程的截面示意图, 其中原坝体的高为 BE , 背水坡坡角 $\angle BAE = 68^\circ$, 新坝体的高为 DE , 背水坡 CD 的坡度为 $\sqrt{3}:1$. 求工程完工后背水坡底端水平方向增加的宽度 AC . (结果精确到 0.1 米. 参考数据: $\sin 68^\circ \approx 0.93$, $\cos 68^\circ \approx 0.37$, $\tan 68^\circ \approx 2.50$, $\sqrt{3} \approx 1.73$).



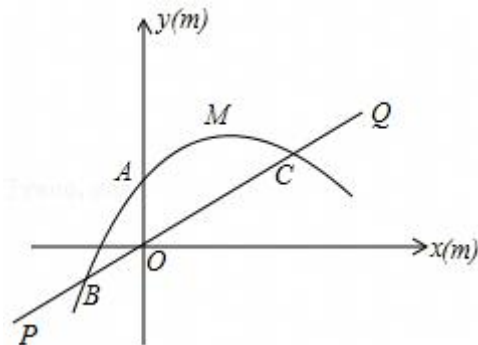
22. (12 分) 已知: 如图, 直线 $y = -x + 4$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 点, 将 $\triangle AOB$ 折叠, 使 A 点恰好落在 OB 的中点 C 处, 折痕为 DE .

- (1) 求 AE 的长及 $\sin \angle BEC$ 的值;
- (2) 求 $\triangle BCE$ 的面积.



23. (12 分) 已知: 如图, 斜坡 PQ 的坡度 $i = 1: \sqrt{3}$, 在坡面上点 O 处有一根 $1m$ 高且垂直于水平面的水管 OA , 顶端 A 处有一旋转式喷头向外喷水, 水流在各个方向沿相同的抛物线落下, 水流最高点 M 比点 A 高出 $1m$, 且在点 A 测得点 M 的仰角为 30° , 以 O 点为原点, OA 所在直线为 y 轴, 过 O 点垂直于 OA 的直线为 x 轴建立直角坐标系. 设水喷到斜坡上的最低点为 B , 最高点为 C .

- (1) 写出 A 点的坐标及直线 PQ 的解析式;
- (2) 求此抛物线 AMC 的解析式;
- (3) 求 $|x_C - x_B|$;
- (4) 求 B 点与 C 点间的距离.





24. (14 分) 阅读材料:

关于三角函数还有如下的公式:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}.$$

利用这些公式可以将一些不是特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数来求值.

$$\text{例: } \tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}.$$

根据以上阅读材料, 请选择适当的公式解答下面问题:



图 1

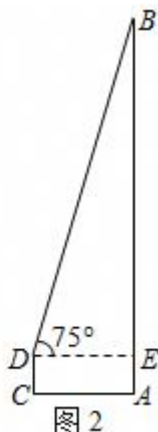


图 2

(1) 计算: $\sin 15^\circ$;

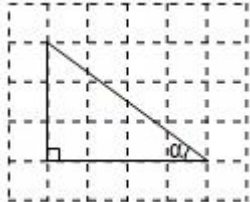
(2) 乌蒙铁塔是六盘水市标志性建筑物之一(图 1), 小华想用所学知识来测量该铁塔的高度, 如图 2, 小华站在离塔底 A 距离 8 米的 C 处, 测得塔顶的仰角为 75° , 小华的眼睛离地面的距离 DC 为 1.62 米, 请帮助小华求出乌蒙铁塔的高度.(精确到 0.1 米, 参考数据 $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{2} \approx 1.414$)



三角函数单元测试卷

一、选择题

1. (4分) 三角形在正方形网格纸中的位置如图所示, 则 $\sin\alpha$ 的值是 ()



- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

【分析】锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦, 即 $\sin A = \angle A$ 的对边除以斜边.

【解答】解: 由图可得, 直角三角形的斜边长 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,

$$\therefore \sin\alpha = \frac{3}{5},$$

故选: A.

【点评】本题主要考查了锐角三角函数的定义, 我们把锐角 A 的对边 a 与斜边 c 的比叫做 $\angle A$ 的正弦, 记作 $\sin A$.

2. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan A = 1$, $\cos B = \frac{1}{2}$, 则 $\angle C$ 的度数是 ()

- A. 75° B. 60° C. 45° D. 105°

【分析】先根据 $\tan A = 1$, $\cos B = \frac{1}{2}$ 求出 $\angle A$, $\angle B$ 的值, 再根据三角形内角和定理解答即可.

【解答】解: $\because \tan A = 1$, $\cos \angle B = \frac{1}{2}$,

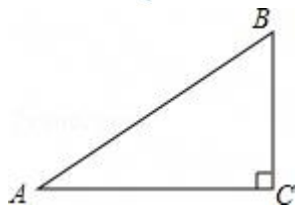
$$\therefore \angle A = 45^\circ, \angle B = 60^\circ.$$

$$\therefore \angle C = 75^\circ.$$

故选: A.

【点评】解答此题的关键是熟记特殊角的三角函数值及三角形内角和定理.

3. (4分) 如图, 为了测楼房 BC 的高, 在距离楼房 10 米的 A 处, 测得楼顶 B 的仰角为 α , 那么楼房 BC 的高为 () 米.



- A. $\frac{10}{\sin\alpha}$ B. $\frac{10}{\tan\alpha}$ C. $10\sin\alpha$ D. $10\tan\alpha$

【分析】根据正切的概念和仰角的概念解答即可.

【解答】解: $\because \tan A = \frac{BC}{AC}$,

$$\therefore BC = AC \cdot \tan A = 10 \tan \alpha,$$

故选: D.

【点评】本题考查的是解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题, 掌握仰角俯角的概念、熟记锐角三角函数的定义是解题的关键.

4. (4分) 计算 $6\tan 45^\circ - 2\cos 60^\circ$ 的结果是 ()

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【分析】根据特殊角三角函数值, 可得实数的运算, 根据实数的运算, 可得答案.

【解答】解: 原式 $= 6 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2}$

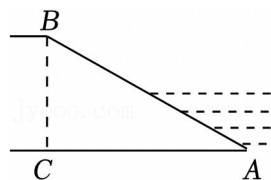
$$= 6 - 1$$

$$= 5.$$

故选: C.

【点评】本题考查了特殊角三角函数值, 熟记特殊角三角函数值是解题关键.

5. (4分) 河堤横断面如图所示, $BC=5$ 米, 迎水坡 AB 的坡度是 $1:2$ (坡度是坡面的铅直高度 BC 与水平宽度 AC 之比), 则 AC 的长为 ()



- A. $5\sqrt{3}$ 米 B. $10\sqrt{3}$ 米 C. 15 米 D. 10 米

【分析】先根据坡度的定义得到 $BC:AC=1:2$, 然后利用比例的性质求出 AC 的长.

【解答】解: 根据题意得 $BC:AC=1:2$,

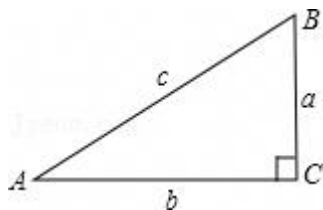
$$\text{所以 } AC = 2BC = 2 \times 5 = 10 \text{ (米)}.$$

故选: D.



【点评】本题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角：度是坡面的铅直高度 h 和水平宽度 l 的比，又叫做坡比，它是一个比值。

6. (4分) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，把 $\angle A$ 的邻边与对边的比叫做 $\angle A$ 的余切，记作 $\cot A = \frac{b}{a}$ 。则下列关系式中不成立的是 ()



- A. $\tan A \cdot \cot A = 1$ B. $\sin A = \tan A \cdot \cos A$
C. $\cos A = \cot A \cdot \sin A$ D. $\tan^2 A + \cot^2 A = 1$

【分析】可根据同角三角函数的关系：平方关系；正余弦与正切之间的关系（积的关系）；正切之间的关系进行解答。

【解答】解：根据锐角三角函数的定义，得

A、 $\tan A \cdot \cot A = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ ，关系式成立；

B、 $\sin A = \frac{a}{c}$ ， $\tan A \cdot \cos A = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a}{c}$ ，关系式成立；

C、 $\cos A = \frac{b}{c}$ ， $\cot A \cdot \sin A = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ，关系式成立；

D、 $\tan^2 A + \cot^2 A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \neq 1$ ，关系式不成立。

故选：D。

【点评】本题考查了同角三角函数的关系。

(1) 平方关系： $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ；

(2) 正余弦与正切之间的关系(积的关系)：一个角的正切值等于这个角的正弦与余弦的比，即 $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ 或 $\sin A = \tan A \cdot \cos A$ 。

(3) 正切之间的关系： $\tan A \cdot \cot A = 1$ 。

7. (4分) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A=120^\circ$ ， $AB=4$ ， $AC=2$ ，则 $\sin B$ 的值是 ()

- A. $\frac{5\sqrt{7}}{14}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{14}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{7}$

【分析】首先延长 BA 过点 C 作 $CD \perp BA$ 延长线于点 D ，进而得出 AD ， CD ， BC 的长，再利用锐角三角函数关系求出即可。

【解答】解：延长 BA 过点 C 作 $CD \perp BA$ 延长线于点 D ，



$$\because \angle CAB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 30^\circ,$$

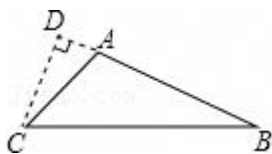
$$\because AB = 4, AC = 2,$$

$$\therefore AD = 1, CD = \sqrt{3}, BD = 5,$$

$$\therefore BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7},$$

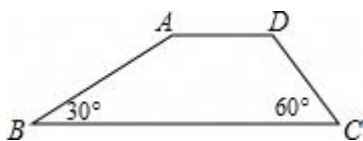
$$\therefore \sin B = \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}.$$

故选：B.



【点评】此题主要考查了解直角三角形，作出正确辅助线构造直角三角形是解题关键.

8. (4分) 如图，四边形 $ABCD$ 为梯形， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $\angle BCD = 60^\circ$ ， $AD = 4$ ， $AB = 3\sqrt{3}$ ，则下底 BC 的长为 ()



A. 6

B. 8

C. 10

D. 12

【分析】首先过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，过点 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ，由梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ，易得四边形 $AEFD$ 是矩形，可得 $EF = AD = 4$ ，在直角三角形 ABE 中利用 30° 角所对的直角边等于斜边的一半求出 AE 的长和 BE 的长，再在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中求出 CF 的值，从而求出 BC 的长.

【解答】解：过点 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ，过点 D 作 $DF \perp BC$ 于 F ，

$$\because AD \parallel BC,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是矩形，

$$\therefore EF = AD = 4,$$

$$\because \angle ABC = 30^\circ, AB = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore AE = DF = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

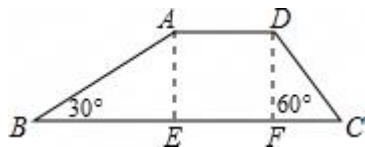


在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中, $\tan 60^\circ = \frac{DF}{FC} = \sqrt{3}$,

$$\therefore CF = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3}{2},$$

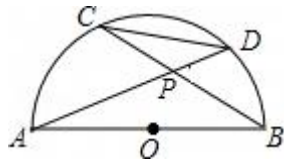
$$\therefore BC = BE + EF + CF = \frac{9}{2} + 4 + \frac{3}{2} = 10,$$

故选: C.



【点评】此题考查了梯形的性质, 直角三角形的性质以及三角函数的应用. 此题难度不大, 解题的关键是注意数形结合思想的应用, 注意辅助线的作法.

9. (4分) 已知如图, AB 是半圆 O 的直径, 弦 AD 、 BC 相交于点 P , 那么 $\frac{CD}{AB}$ 等于 $\angle BPD$ 的 ()



A. 正弦

B. 余弦

C. 正切

D. 以上都不对

【分析】首先连接 BD , 由 AB 是半圆 O 的直径, 可证得 $\angle ADB = 90^\circ$, 即可得 $\cos \angle BPD = \frac{PD}{PB}$, 易证得 $\triangle PCD \sim \triangle PAB$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 求得答案.

【解答】解: 连接 BD ,

$\because AB$ 是半圆 O 的直径,

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle BPD = \frac{PD}{PB},$$

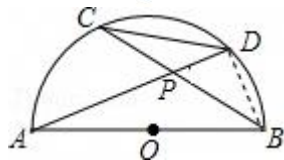
$$\because \angle C = \angle A, \angle ADC = \angle ABC,$$

$$\therefore \triangle PCD \sim \triangle PAB,$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{PD}{PB},$$

$$\therefore \frac{CD}{AB} = \cos \angle BPD.$$

故选: B.



【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质以及圆周角定理．注意准确作出辅助线是解此题的关键．

10. (4分) 因为 $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$, 所以 $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$; 因为 $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\sin 225^\circ = \sin(180^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ$, 由此猜想, 推理知: 一般地当 α 为锐角时有 $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$, 由此可知: $\sin 240^\circ =$ ()

A. $-\frac{1}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $-\sqrt{3}$

【分析】阅读理解: $240^\circ = 180^\circ + 60^\circ$, 因而 $\sin 240^\circ$ 就可以转化为 60° 的角的三角函数值.

根据特殊角的三角函数值, 就可以求解.

【解答】解: $\because$ 当 α 为锐角时有 $\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$,

$$\therefore \sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选: C.

【点评】此题为阅读理解题, 考查学生自主学习的能力及对特殊角度的三角函数值的运用.

二、填空题

11. (5分) 已知 $\angle B$ 是锐角, 若 $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, 则 $\tan B$ 的值为 $\sqrt{3}$.

【分析】根据特殊角的三角函数值解答.

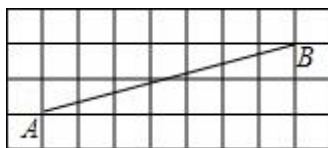
【解答】解: $\because \angle B$ 是锐角, $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore \frac{\angle B}{2} = 30^\circ, \angle B = 60^\circ,$$

$$\text{则 } \tan B = \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

【点评】解答此题的关键是熟记特殊角的三角函数值.

12. (5分) 如图, 正方形网格中每个小正方形的边长为 1, 网格上线段 AB 表示一个斜坡, 则这个斜坡的坡度是 $i=1: 3.5$.



【分析】坡角指斜坡与水平线的夹角. 应作出水平线, 构成直角三角形, 求出坡角的正切值.

【解答】解: 如图, $BC=2$, $AC=7$, $\angle ACB=90^\circ$, $\therefore$ 斜坡的坡度 $i=BC: AC=2: 7=1: 3.5$.



【点评】本题考查了坡度的概念.

13. (5分) 计算: $2\sin 30^\circ - \sqrt{16} = \underline{-3}$.

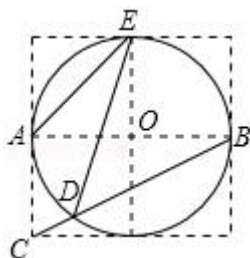
【分析】由特殊角的三角函数值与二次根式的化简的知识, 即可将原式化简, 继而求得答案.

【解答】解: $2\sin 30^\circ - \sqrt{16} = 2 \times \frac{1}{2} - 4 = 1 - 4 = -3$.

故答案为: -3 .

【点评】此题考查了实数的混合运算. 此题难度不大, 注意掌握特殊角的三角函数值与二次根式的化简, 注意运算要细心.

14. (5分) 如图, 边长为 1 的小正方形网格中, $\odot O$ 的圆心在格点上, 则 $\angle AED$ 的正弦值是 $\underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}$.



【分析】直接利用圆周角定理结合勾股定理以及锐角三角函数关系得出答案.

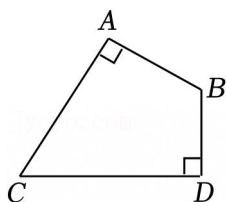
【解答】解: 由题意可得: $\angle AED = \angle ABC$,

故 $\angle AED$ 的正弦值为: $\sin \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

故答案为: $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

【点评】此题主要考查了圆周角定理以及解直角三角形, 正确得出: $\angle AED = \angle ABC$ 是解题关键.

15. (5分) 如图, 一块四边形土地, 其中, $\angle ABD = 120^\circ$, $AB \perp AC$, $BD \perp CD$, $AB = 30m$, $CD = 50m$, 则这块土地的面积为 $\underline{800\sqrt{3}} m^2$.



【分析】如图所示延长 CA , DB 交于点 P , 因为 $\angle ABD = 120^\circ$, $\angle ACD = 60^\circ$, 在 $Rt\triangle CDP$ 中, $\tan \angle$



$ACD = \frac{PD}{CD}$, 由此可以求 PD . 在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, $\tan \angle PBA = \frac{PA}{AB}$, 由此可以求出 PA , 而 $S_{\text{四}}$

边形 $ABCD = S_{\triangle CDP} - S_{\triangle ABP}$, 利用三角形的面积公式即可求出其面积, 即这块土地的面积.

【解答】解: 如图, 延长 CA , DB 交于点 P ,

$\because \angle ABD = 120^\circ$, $\angle ACD = 60^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle CDP$ 中, $\tan \angle ACD = \frac{PD}{CD}$,

$\therefore PD = CD \cdot \tan \angle ACD = 50 \cdot \tan 60^\circ = 50\sqrt{3} \text{ (m)}.$

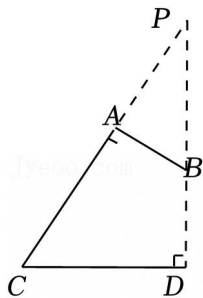
在 $\text{Rt}\triangle PAB$ 中, $\tan \angle PBA = \frac{PA}{AB}$,

$\therefore PA = AB \cdot \tan \angle PBA = 30 \cdot \tan 60^\circ = 30\sqrt{3} \text{ (m)}.$

$\therefore S_{\text{四边形 } ABCD} = S_{\triangle CDP} - S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 50 \times 50\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 30 \times 30\sqrt{3} = 800\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}.$

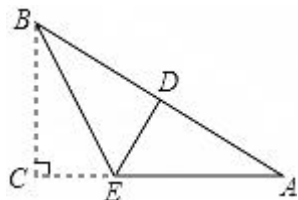
即这块土地面积为 $800\sqrt{3} \text{ m}^2$,

故答案为: $800\sqrt{3}$.



【点评】此题考查勾股定理的应用, 解此题关键是构建直角三角形, 把实际问题抽象到解直角三角形中进行解答. 此外作辅助线构建三角形一定不能破坏特殊的角.

16. (5分) 如图, 在三角形纸片 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 12$, 折叠该纸片, 使点 C 落在 AB 边上的 D 点处, 折痕 BE 与 AC 交于点 E , 若 $AD = BD$, 则折痕 BE 的长为 8.



【分析】如图, 首先证明 $\angle CBE = \angle DBE$ (设为 α), 其次证明 $\angle A = \angle DBE = \alpha$; 求出 $\alpha = 30^\circ$, 得到 $CE = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}x$; 借助 $AC = 12$, 求出 x 即可解决问题.

【解答】解: 如图, 由题意得: $\angle CBE = \angle DBE$ (设为 α),
 $\angle ADE = \angle C = 90^\circ$;



$$\because AD=BD,$$

$$\therefore BE=AE \text{ (设为 } x), \angle A=\angle DBE=\alpha;$$

$$\because \angle C=90^\circ,$$

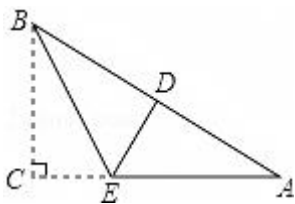
$$\therefore 2\alpha+\alpha=90^\circ,$$

$$\therefore \alpha=30^\circ, CE=\frac{1}{2}BE=\frac{1}{2}AE=\frac{1}{2}x;$$

$$\because AC=12, \text{ 即 } x+\frac{1}{2}x=12,$$

$$\therefore x=8.$$

故答案为: 8.



【点评】 本题主要考查了翻折变换的性质、直角三角形的边角关系、三线合一等知识点及其应用问题，牢固掌握翻折变换的性质等几何知识点是解题的关键。

三、解答题

17. (8分) 求下列各式的值.

(1) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ$;

(2) $\sin^2 45^\circ + \tan 30^\circ \cos 30^\circ$;

(3) $2\sin^2 60^\circ - \sqrt{3}\tan 30^\circ - 2\cos^2 45^\circ - \frac{2\sin 30^\circ}{4\cos 60^\circ - 1}$.

【分析】 根据特殊三角函数值进行化简即可.

【解答】 解: (1) $\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

(2) $\sin^2 45^\circ + \tan 30^\circ \cos 30^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

(3) $2\sin^2 60^\circ - \sqrt{3}\tan 30^\circ - 2\cos^2 45^\circ - \frac{2\sin 30^\circ}{4\cos 60^\circ - 1} = 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{2 \times \frac{1}{2}}{4 \times \frac{1}{2} - 1} = \frac{3}{2} - 1 - 1 - 1 = -\frac{3}{2}$.

【点评】 本题侧重考查特殊三角函数值，熟记特殊三角函数值是解决此题的关键.

18. (8分) 已知 α 是锐角，且 $\sin(\alpha+15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，计算： $\sqrt{8} - 4\cos\alpha - (\pi - 3.14)^0 + \tan\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ 的值.

【分析】 直接利用零指数幂的性质、负指数幂的性质以及二次根式的性质分别化简得出答案.



【解答】解：∵ $\sin(\alpha + 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore \alpha = 45^\circ,$$

$$\therefore \sqrt{8} - 4\cos\alpha - (\pi - 3.14)^0 + \tan\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$= 2\sqrt{2} - 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 1 + 3$$

$$= 3.$$

【点评】此题主要考查了实数运算以及特殊角的三角函数值，正确记忆相关数据是解题关键。

19. (8分) 计算，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$.

(1) 已知 $c = 8$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，求 $\angle B$ ， a ， b ；

(2) 已知 $a = 3$ ， $\angle A = 30^\circ$ ，求 $\angle B$ ， b ， c .

【分析】根据题中所给的条件，在直角三角形中解题，根据角的正弦值及余弦值与三角形边的关系，可求出各边的长，然后再代入三角函数进行求解.

【解答】解：(1) ∵ $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle A = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = 30^\circ,$$

$$\because c = 8, \sin 60^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore a = 4\sqrt{3},$$

$$\because \cos 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{b}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore b = 4;$$

(2) 同理得： $\angle B = 30^\circ$ ，

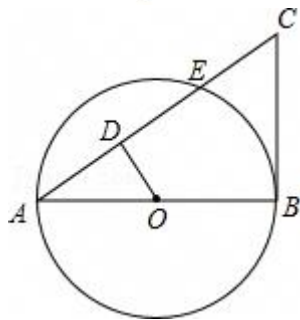
$$b = 3\sqrt{3}, c = 6.$$

【点评】考查利用直角三角形的性质及三角函数的运用，还考查解直角三角形的定义，由直角三角形已知元素求未知元素的过程，只要理解直角三角形中边角之间的关系即可求解.

20. (8分) 如图， AB 为 $\odot O$ 的直径， BC 为 $\odot O$ 的切线， AC 交 $\odot O$ 于点 E ， D 为 AC 上一点， $\angle AOD = \angle C$.

(1) 求证： $OD \perp AC$ ；

(2) 若 $AE = 8$ ， $AB = 10$ ，求 OD 的长.



【分析】(1) 根据切线的性质得出 $\angle ABC = 90^\circ$ ，进而得出 $\angle A + \angle C = 90^\circ$ ，再由 $\angle AOD = \angle C$ ，可得 $\angle AOD + \angle A = 90^\circ$ ，即可证明；

(2) 由垂径定理可得， D 为 AE 中点，根据已知可利用勾股定理求出。

【解答】(1) 证明： $\because BC$ 是 $\odot O$ 的切线， AB 为 $\odot O$ 的直径

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle A + \angle C = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle AOD = \angle C,$$

$$\therefore \angle AOD + \angle A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = 90^\circ,$$

$$\therefore OD \perp AC;$$

(2) 解： $\because OD \perp AE$ ， O 为圆心，

$$\therefore D \text{ 为 } AE \text{ 中点，} AE = 8,$$

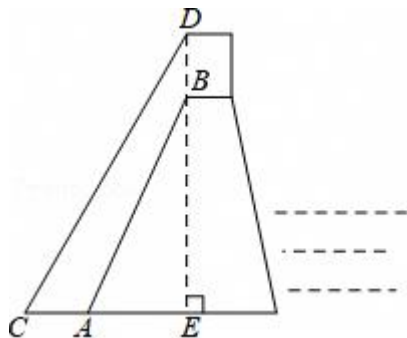
$$\therefore AD = \frac{1}{2}AE = 4,$$

$$\because AO = \frac{1}{2}AB = 5,$$

$$\therefore OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = 3.$$

【点评】此题主要考查了圆的切线性质，及解直角三角形的知识和垂径定理的应用等知识，利用 $OD \perp AE$ ， O 为圆心，得出 D 为 AE 中点，再利用解直角三角形知识是解决问题的关键。

21. (10 分) 我国南水北调中线工程的起点是丹江水库，按照工程计划，需对原水库大坝进行混凝土培厚加高，使坝高由原来的 162 米增加到 176.6 米，以抬高蓄水位。如图是某一段坝体加高工程的截面示意图，其中原坝体的高为 BE ，背水坡坡角 $\angle BAE = 68^\circ$ ，新坝体的高为 DE ，背水坡 CD 的坡度为 $\sqrt{3}:1$ 。求工程完工后背水坡底端水平方向增加的宽度 AC 。(结果精确到 0.1 米。参考数据： $\sin 68^\circ \approx 0.93$ ， $\cos 68^\circ \approx 0.37$ ， $\tan 68^\circ \approx 2.50$ ， $\sqrt{3} \approx 1.73$)。



【分析】根据正切的定义分别求出 CE 、 AE ，结合图形计算．

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle BAE$ 中， $\tan \angle BAE = \frac{BE}{AE}$ ，即 $\frac{162}{AE} = 2.5$ ，

解得， $AE = 64.8$ ，

在 $\text{Rt}\triangle DCE$ 中， $\tan \angle DCE = \frac{DE}{CE}$ ，即 $\frac{176.6}{CE} = \sqrt{3}$ ，

解得， $CE = 102.08$ ，

$AC = CE - AE = 102.08 - 64.8 \approx 37.3$ （米），

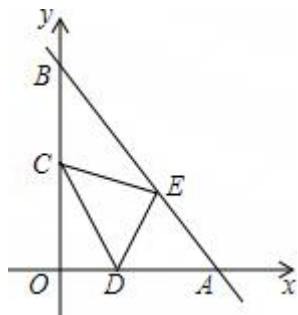
答：工程完工后背水坡底端水平方向增加的宽度 AC 约为 37.3 米．

【点评】本题考查的是解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，理解坡度的概念、掌握锐角三角函数的概念是解题的关键．

22. (12 分) 已知：如图，直线 $y = -x + 4$ 分别交 x 轴、 y 轴于 A 、 B 点，将 $\triangle AOB$ 折叠，使 A 点恰好落在 OB 的中点 C 处，折痕为 DE ．

(1) 求 AE 的长及 $\sin \angle BEC$ 的值；

(2) 求 $\triangle BCE$ 的面积．



【分析】(1) 作 $CF \perp BE$ 于 F 点，由函数解析式可得点 $B(0, 4)$ ，点 $A(4, 0)$ ， $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ，设 $AE = CE = x$ ，表示出 EF 、 CF ，然后在 $\text{Rt}\triangle CEF$ 中利用勾股定理可求出 x ，继而可得出答案．

(2) 直接利用 $S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2}BE \cdot CF$ 求出答案即可．

【解答】解：如图 1，作 $CF \perp BE$ 于 F 点，由函数解析式可得点 $B(0, 4)$ ，点 $A(4, 0)$ ， $\angle A = \angle B =$

$$\therefore OC=BC=2, \quad CF=BF=\sqrt{2},$$

在 $RT\triangle CEF$ 中, $CE^2=CF^2+EF^2$, 即 $x^2=(3\sqrt{2}-x)^2+(\sqrt{2})^2$,

故可得 $\sin \angle BEC = \frac{CF}{CE} = \frac{3}{5}$, $AE = \frac{5\sqrt{2}}{3}$;

$$(2) \text{ 则 } S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} BE \cdot CF = \frac{1}{2} \times (AB - AE) \times CF = \frac{1}{2} \times \frac{7\sqrt{2}}{3} \times \sqrt{2} = \frac{7}{3}.$$

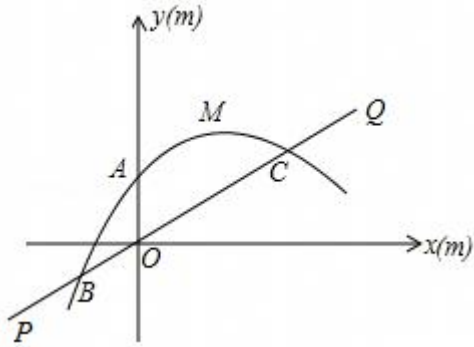
【点评】本题考查了一次函数的综合题，涉及了三角函数、勾股定理、翻折变换的性质及三角形的面积，解答本题的关键是利用勾股定理求出 AE 的长，此题三角形的面积可以表示为 $\frac{1}{2}absin\angle C$ ，（其中 $\angle C$ 是边 a 、 b 的夹角）。

(1) 写出 A 点的坐标及直线 PO 的解析式;

(2) 求此抛物线 AMC 的解析式;

(3) 求 $|x_C - x_B|$;

(4) 求 B 点与 C 点间的距离.



【分析】(1) 利用 AO 长度得出 A 点坐标即可，再利用斜坡 PQ 的坡度 $i=1:\sqrt{3}$ ，求出直线 PQ 的解析式；

(2) 首先根据已知得出 M 点坐标，进而利用顶点式求出二次函数解析式即可；

(3) 将直线 BQ 的解析式： $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，以及抛物线 AMC 的解析式： $y = -\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2 + 2 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 1$ 联立，求出 B, C 点的横坐标进而得出 $|x_C - x_B|$ 的值；

(4) 构造直角三角形，利用 $BC = \frac{BH}{\cos 30^\circ}$ 求出即可。

【解答】解：(1) 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴一点 D ，

$\because$ 在坡面上点 O 处有一根 $1m$ 高且垂直于水平面的水管 OA ，

$\therefore A$ 点的坐标为： $A(0, 1)$ ，

$\because$ 斜坡 PQ 的坡度 $i=1:\sqrt{3}$ ，

$\therefore$ 设 C 点横坐标为 x ，则纵坐标为： $\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ，

$\therefore$ 直线 PQ 的解析式为： $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ；

(2) 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N ，作 $AF \perp MN$ 于点 F ，连接 AM ，

$\because$ 水流最高点 M 比点 A 高出 $1m$ ，且在点 A 测得点 M 的仰角为 30° ，

$\therefore MF=1, MN=2, AM=2$ ，则 $AF=\sqrt{3}$ ，

$\therefore M$ 点坐标为： $(\sqrt{3}, 2)$ ，代入 $y = a(x-\sqrt{3})^2 + 2$ ，

再将 $(0, 1)$ 代入上式得：

$$1 = a(0 - \sqrt{3})^2 + 2,$$

$$\text{解得：} a = -\frac{1}{3},$$

此抛物线 AMC 的解析式为： $y = -\frac{1}{3}(x-\sqrt{3})^2 + 2 = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 1$ ；



(3) 将直线 BQ 的解析式: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 以及抛物线 AMC 的解析式: $y = -\frac{1}{3}(x - \sqrt{3})^2 + 2$ 联立:

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 = 0$$

$$x^2 - \sqrt{3}x - 3 = 0,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}, x_2 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{15}}{2},$$

$$\text{故 } C \text{ 点横坐标为: } \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}, B \text{ 点横坐标为: } \frac{\sqrt{3} - \sqrt{15}}{2},$$

$$\therefore |x_C - x_B| = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{15}}{2} = \sqrt{15} \text{ (m)};$$

(4) 过点 B 作 $BH \perp CD$ 于点 H ,

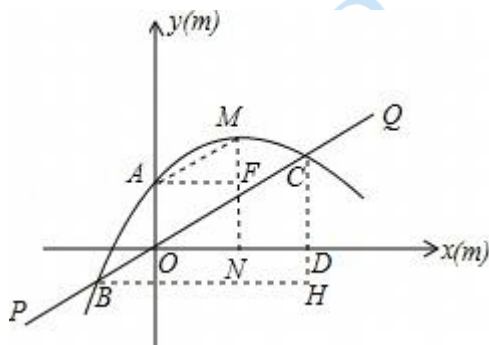
$\therefore$ 斜坡 PQ 的坡度 $i = 1 : \sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \angle CBH = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle CBH = 30^\circ,$$

$$\therefore |x_C - x_B| = BH = \sqrt{15},$$

$$\therefore BC = \frac{BH}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{15}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{5} \text{ (m)}.$$



【点评】 本题考查了二次函数的应用以及坡度问题和解直角三角形的应用等知识, 正确构造出直角三角形是解题关键.

24. (14 分) 阅读材料:

关于三角函数还有如下的公式:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta; \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$

利用这些公式可以将一些不是特殊角的三角函数转化为特殊角的三角函数来求值.



$$\text{例: } \tan 15^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} =$$

$$\frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}.$$

根据以上阅读材料，请选择适当的公式解答下面问题：



图 1

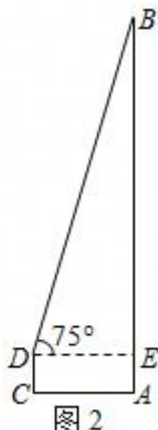


图 2

(1) 计算： $\sin 15^\circ$ ；

(2) 乌蒙铁塔是六盘水市标志性建筑物之一（图 1），小华想用所学知识来测量该铁塔的高度，如图 2，小华站在离塔底 A 距离 8 米的 C 处，测得塔顶的仰角为 75° ，小华的眼睛离地面的距离 DC 为 1.62 米，请帮助小华求出乌蒙铁塔的高度。（精确到 0.1 米，参考数据 $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{2} \approx 1.414$ ）

【分析】(1) 根据题意即可求出结果；

(2) 利用锐角三角函数即可求解。

【解答】解：(1) 由题意可知：

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin (45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}; \end{aligned}$$

(2) 在 $\text{Rt}\triangle BDE$ 中，

$$\because \angle BED = 90^\circ, \angle BDE = 75^\circ, DE = AC = 8 \text{ 米},$$

$$\therefore \angle DBE = 15^\circ.$$

$$\therefore BE = \frac{DE}{\tan \angle DBE} = \frac{DE}{\tan 15^\circ}$$



$$= \frac{8}{2-\sqrt{3}} = (16+8\sqrt{3}) \text{ (米)}.$$

$$\therefore AB = AE + BE = 1.62 + 16 + 8\sqrt{3} \approx 31.5 \text{ (米)}.$$

答：乌蒙铁塔的高度约为 31.5 米.

【点评】 本题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题、坡度坡角问题，要求学生能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形.

