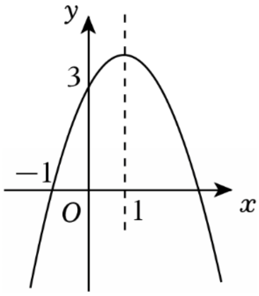
第 15 讲：二次函数与代数综合

【二次函数与不等式】

1．如图是二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，则不等式 $ax^2+bx+c<3$ 的解集是（　　）



A．$-1<x<3$　　　B．$x<-1$ 或 $x>3$　　　C．$0<x<2$　　　D．$x<0$ 或 $x>2$

【解答】解：由图可知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象的对称轴为 $x=1$，与 y 轴的交点坐标为 $(0,3)$，

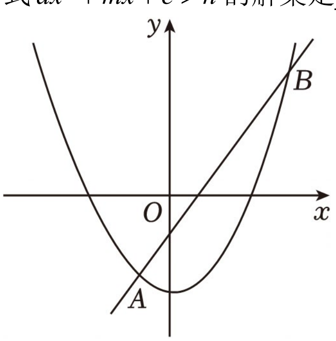
由二次函数图象的对称性可知，点 $(2,3)$ 也在函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象上，

由图可知，当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，对应的 y 值小于 3，

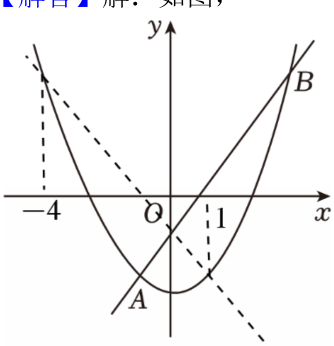
因此 $ax^2+bx+c<3$ 的解集为：$x<0$ 或 $x>2$．

故选：D．

2．如图，函数 $y=ax^2+c$ 与 $y=mx+n$ 的图象交于 $A(-1,p)$，$B(4,q)$ 两点，则关于 x 的不等式 $ax^2+mx+c>n$ 的解集是__________．



【解答】解：如图，



由 $ax^2+mx+c>n$ 得，

$ax^2+c>-mx+n$，

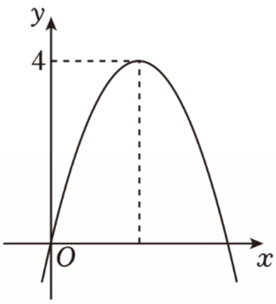
即抛物线 $y=ax^2+c$ 对应比直线 $y=-mx+n$ 高的自变量 x 的取值，

从图象可得：$x>1$ 或 $x<-4$，

故答案为：$x>1$ 或 $x<-4$．

【二次函数与方程】

3．二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象如图所示，若一元二次方程 $ax^2+bx-m=1$ 有实数根，则 m 的最大值为（　　）



A．4　　　　B．-4　　　　C．3　　　　D．-3

【解答】解：由图象可得，

二次函数 $y=ax^2+bx$ 的最大值是 $y=4$，

$\because$ 一元二次方程 $ax^2+bx-m=1$ 有实数根，

即一元二次方程 $ax^2+bx=m+1$ 有实数根，

也就是 $y=ax^2+bx$ 与 $y=m+1$ 有交点，

$\therefore m+1\leqslant 4$，

解得：$m\leqslant 3$，

$\therefore m$ 的最大值是 3，

故选：C．

4．已知 m，$n(m<n)$ 恰好是关于 x 的一元二次方程 $x^2-(a+b)x+ab=2$ 的两个实数根，若 $b>a$，请根据二次函数图象与 x 轴的交点和一元二次方程的根之间的联系推断 a，b，m，n 的大小关系是（　　）

A．$m<a<b<n$　　　　B．$a<m<n<b$　　　　C．$a<m<b<n$　　　　D．$m<a<n<b$

【解答】解：已知 m，$n(m<n)$ 恰好是关于 x 的一元二次方程 $x^2-(a+b)x+ab=2$ 的两个实数根，

设二次函数 $y=(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$，

$\because$ 该二次函数二次项系数为 $1>0$，

$\therefore$ 抛物线开口向上，且抛物线与 x 轴交于 $(a,0)$ 和 $(b,0)$；

由题意得 m，n 是方程 $(x-a)(x-b)=2$ 的两个实数根，

即当 $y=2$ 时对应 x 的值为 m，n；

$\because$ 当 $a<x<b$ 时，开口向上的抛物线在 x 轴下方，即此时 $y<0$，

$\therefore y=2$ 对应的两个自变量 m ， n 分别在区间 (a,b) 两侧，

又 $\because m<n$ ， $a<b$ ，

$\therefore m<a$ ， $n>b$ ，即 $m<a<b<n$.

故选： A .

【二次函数与整数根】

5．已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过 $(-3,0)$ 与 $(1,0)$ 两点，关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+m=0(m>0)$ 有两个根，其中一个根是 3，则关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+n=0(0<n<m)$ 有两个整数根，这两个整数根是（　　）

A． -2 或 0　　B． -4 或 2　　C． -5 或 3　　D． -6 或 4

【解答】解： $\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象经过 $(-3,0)$ 与 $(1,0)$ 两点，

$\therefore$ 当 $y=0$ 时， $0=ax^2+bx+c$ 的两个根为 -3 和 1，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴是直线 $x=-1$ ，

又 $\because$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+m=0(m>0)$ 有两个根，其中一个根是 3，

$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c+m=0(m>0)$ 的另一个根为 -5 ，

$\because$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+n=0(0<n<m)$ 有两个整数根，

$\therefore$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=-n$ 的交点的横坐标在 -5 与 -3 之间和 1 与 3 之间，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+n=0(0<n<m)$ 有两个整数根，这两个整数根是 -4 和 2，

故选： B .

6．已知抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的对称轴为直线 $x=2$ ，与 x 轴的一个交点 $(-2,0)$ ．若关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=p(p<0)$ 有整数根，则 p 的值有（　　）

A．2 个　　B．3 个　　C．4 个　　D．5 个

【解答】解： $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的对称轴为直线 $x=2$ ，

$\therefore -\dfrac{b}{2a}=2$ ，

解得 $b=-4a$ ，

又 $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 与 x 轴的一个交点为 $(-2,0)$ ，

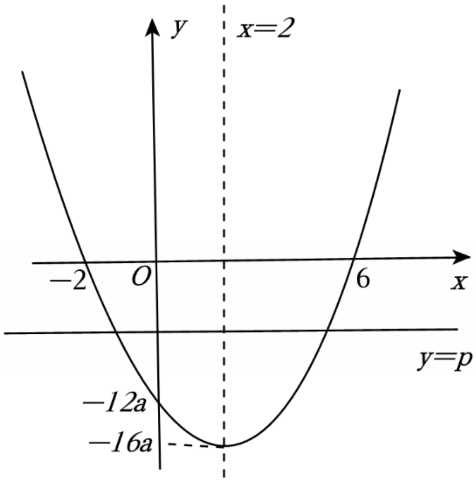
把 $(-2,0)$ 和 $b=-4a$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得， $0=4a+8a+c$ ，

解得： $c=-12a$ ，

$\therefore y=ax^2-4ax-12a(a>0)$ ，

对称轴 $h=2$ ，最小值 $k=\dfrac{4a\times(-12a)-(-4a)^2}{4a}=-16a$ ，

如图：



顶点坐标为$(2,-16a)$，

令$ax^2-4ax-12a=0$，

即$x^2-4x-12=0$，

解得$x=-2$或$x=6$，

$\therefore$当$a>0$时，抛物线始终与x轴交于$(-2,0)$与$(6,0)$，

若关于x的一元二次方程$ax^2+bx+c=p(p<0)$有整数根，

即常函数直线$y=p(p<0)$与二次函数$y=ax^2+bx+c$有交点，

$\therefore -16a\leqslant y<0$，

由图象得当$-16a\leqslant y<0$时，$-2<x<6$，其中x为整数时，$x=-1$，0，1，2，3，4，5，

$\therefore$一元二次方程$ax^2+bx+c=p(p<0)$的整数解有 7 个.

又$\because x=-1$与$x=5$，$x=0$与$x=4$，$x=1$与$x=3$关于直线$x=2$轴对称，

当$x=2$时，直线$y=p$恰好过抛物线顶点，

所以p值可以有 4 个.

故选：C.

【二次函数与坐标轴的交点】

7．若函数$y=kx^2-6x+3$的图象与x轴有交点，则k的取值范围是（　　）

A．$k<3$　　B．$k<3$且$k\neq0$　　C．$k\leqslant3$　　D．$k\leqslant3$且$k\neq0$

【解答】解：当$k\neq0$时，由二次函数与x轴有交点，可得

$kx^2-6x+3=0$有实根.

即$b^2-4ac=36-12k\geqslant0$，

解不等式，得$k\leqslant3$.

当$k=0$时，函数是一次函数，与x轴交于$(\frac{1}{2}，0)$，满足题意.

所以k的取值范围为：$k\leqslant3$.

故选：C.

8．二次函数 $y=ax^2-4x+1$ 的图象与 x 轴有两个交点且都在 y 轴的同一侧，则（　　）

A．$a>0$　　B．$a>4$　　C．$a<4$ 且 $a\neq 0$　　D．$0<a<4$

【解答】解：根据题意，得△$=4^2-4a>0$，

解得 $a<4$．

设二次函数图象与 x 轴的两个交点为 $(x_1，0)$，$(x_2，0)$，

则 $x_1+x_2=\frac{4}{a}<0$ 且 $x_1x_2=\frac{1}{a}>0$，或 $x_1+x_2=\frac{4}{a}>0$ 且 $x_1x_2=\frac{1}{a}>0$，

所以 a 无解或 $a>0$．

综上所述，a 的取值范围为 $0<a<4$．

故选：D．

【二次函数的交点问题】

9．已知二次函数 $y=x^2-m$ 的图象与一次函数 $y=2x$ 的图象有两个交点，则 m 的取值范围是（　　）

A．$m>-1$　　B．$m<-2$　　C．$m\geqslant 0$　　D．$m<0$

【解答】解：联立方程组 $\begin{cases} y=x^2-m \\ y=2x \end{cases}$

①$-$②得 $x^2-2x-m=0$

当△>0 时，方程有两个不相等的解，函数图象就有两个交点，

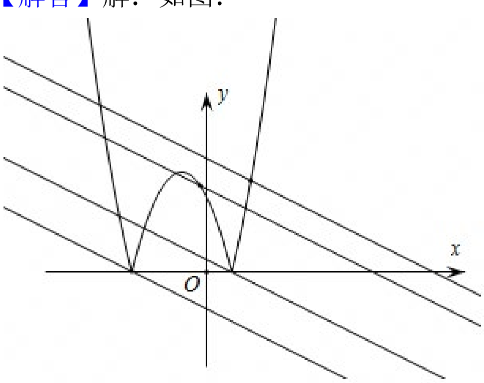
即：$(-2)^2-4\times 1\times(-m)>0$，

解得：$m>-1$．

故选：A．

10．将函数 $y=x^2+2x-3$ 的图象位于 x 轴下方的部分沿 x 轴翻折至其上方后，所得的是新函数 $y=|x^2+2x-3|$ 的图象，若该新函数图象与直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 有两个交点，则 b 的取值范围为__________．

【解答】解：如图：



令 $y=0$，$x^2+2x-3=0$，

解得 $x=-3$ 或 $x=1$，

$\therefore$ 函数 $y=|x^2+2x-3|$ 的图象与 x 轴的交点为 $(-3,0)$， $(1,0)$，

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 经过点 $(-3,0)$ 时， $b=-\frac{3}{2}$，

此时直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与 $y=|x^2+2x-3|$ 只有一个交点，

当直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 经过点 $(1,0)$ 时， $b=\frac{1}{2}$，

此时直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与 $y=|x^2+2x-3|$ 有三个交点，

$\therefore -\frac{3}{2}<b<\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与 $y=|x^2+2x-3|$ 有两个交点；

当 $y=-x^2-2x+3$ 与 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 有一个交点时，

即 $-x^2-2x+3=-\frac{1}{2}x+b$，

$\therefore b=\frac{57}{16}$，

此时此时直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与 $y=|x^2+2x-3|$ 有三个交点，

$\therefore$ 当 $b>\frac{57}{16}$ 时，直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与 $y=|x^2+2x-3|$ 有两个交点；

综上所述： $b>\frac{57}{16}$ 或 $-\frac{3}{2}<b<\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=-\frac{1}{2}x+b$ 与 $y=|x^2+2x-3|$ 有两个交点；

故答案为 $b>\frac{57}{16}$ 或 $-\frac{3}{2}<b<\frac{1}{2}$．