一元二次方程

知识点清单

知识点 1：一元二次方程的概念

1. 一元二次方程的概念

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的整式方程叫作一元二次方程。

2. 一元二次方程一般形式

$ax^2+bx+c=0$（a、b、c 是常数，$a\neq0$），其中 ax^2 为二次项，bx 为一次项，c 为常数项；a 为二次项系数，b 为一次项系数。

3. 一元二次方程识别关键

（1）只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次；

（2）必须含二次项，一次项和常数项可不含，注意二次项系数不为零；

（3）必须是整式方程，出现分式和根式一律否决，整式方程需化简。

4. 方程的解

能使方程左右两边相等的未知数的值就叫方程的解。

知识点 2：一元二次方程的解法

1. 直接开方法

（1）$(mx+n)^2=t\left(m\neq0,\ t\geq0\right)$的解 $x=\dfrac{-n\pm\sqrt{t}}{m}$；

（2）$ax^2=b$（$a\neq0$，ab 同号）的两个根互为相反数。

2. 配方法

配方法一般步骤：

（1）二次项系数化为 1；

（2）常数项右移；

（3）配方（等号两边同时加上一次项系数一半的平方）；

（4）化为$(x+m)^2=n$的形式；

（5）若$n\geq 0$，直接开平方求方程的解。

3. 公式法：$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$**按配方法的步骤求方程的解**

$$ax^2+bx+c=0\xrightarrow[\text{除以}a]{\text{左右同}}x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\xrightarrow[\text{右移}]{\text{常数项}}x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}\xrightarrow[\text{一次项系数一半平方}]{\text{左右两边同时加上}}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\xrightarrow[\text{公式}]{\text{完全平方}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\xrightarrow[\text{求}x]{\text{直接开方法}}x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

（其中$b^2-4ac\geq 0$）

4. 因式分解法

（1）取公因式；

（2）平方差公式；

（3）十字相乘法。

5. 换元法

将某一部分看成一个整体，设它为一个新的未知数并求出这个未知数，再进一步解题。

6. 降次求值

利用等式性质和乘法性质将高次幂变为低次幂再求解。

知识点3：根的判别式

1. 根的判别式概念

在一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$中，只有当系数$a$，$b$，$c$满足条件$\Delta=b^2-4ac\geq 0$时方程才有实数根。这里的$b^2-4ac$叫作一元二次方程的根的判别式，记作$\Delta$。

2. 判别式与根的关系

一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$的根的情况由$\Delta=b^2-4ac$来确定。

（1）$\Delta>0\Leftrightarrow$一元二次方程有两个不相等的实数根$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

（2）$\Delta=0\Leftrightarrow$一元二次方程有两个相等的实数根$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

（3）$\Delta<0\Leftrightarrow$一元二次方程没有实数根。

知识点4：根与系数的关系（韦达定理）

☆适用的前提是$\Delta\geq 0$

1. 由求根公式得$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，所以

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

2. 用韦达定理判断根

若$\frac{c}{a}>0$，则两根同号$\Rightarrow$如果$-\frac{b}{a}>0$，则两根同正，如果$-\frac{b}{a}<0$，则两根同负；

若$ac<0$，则方程必有两个不等实数根（$\because\Delta=b^2-4ac>0$）。

知识点 5：一元二次方程的应用

1. 特殊题型

（1）m 和 n 是一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根，则可以得到：

$$\begin{cases}am^2+bm+c=0,an^2+bn+c=0\\ m+n=-\frac{b}{a},mn=\frac{c}{a}\end{cases}$$

（2）如果有m、n满足$am^2+bm+c=0,an^2+bn+c=0$，则

①如果 m 和 n 不相等，则 m、n 是方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的两个根满足：

$$m+n=-\frac{b}{a},mn=\frac{c}{a};$$

②如果 m 和 n 是否相等未知，则通过二元一次方程得出 m 和 n，再判断实际情况；

③如果两个数 m和n满足$m+n=-\frac{b}{a},mn=\frac{c}{a}$,则$m$和$n$是方程$ax^2+bx+c=0$的两个根。

2. 列方程解决实际问题的一般步骤

审题→设未知数→列方程→解方程→检验→作答

3. 常见问题

（1）数字问题：个位数为 a,十位数是 b,则这个两位数表示为 $10b+a$。

（2）增长率问题：增长率=增长数量/原数量×100%。

（3）面积问题：

①利用勾股定理列一元二次方程，求三角形、矩形的边长；

②利用三角形、矩形、菱形、梯形和圆的面积，以及柱体体积公式，建立等量关系列一元二次方程；

③利用相似三角形的对应比例关系；列比例式，通过两内项之积等于两外项之积,得到一元二次方程。

（4）运动点问题：物体运动将会沿着一条路线或形成一条痕迹；运行的路线与其他条件会构成直角三角形，可运用直角三角形的性质列方程求解。

真题演练

1．下列方程中，关于 x 的一元二次方程是（　　）

A．$ax^2+bx+c=0$　　　　B．$x^2+y=1$

C．$x^2+\dfrac{1}{x^2}=0$　　　　D．$x^2+x=4$

2．已知方程 $x^2+mx+3=0$ 的一个根是 1，则它的另一个根是（　　）

A．-3　　B．3　　C．-4　　D．4

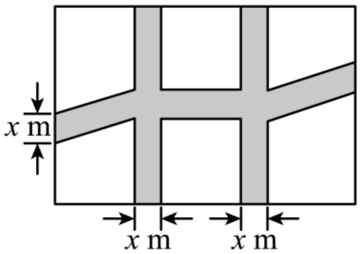
3．一元二次方程 $x^2+5x-4=0$ 的两个实数根为 x_1 和 x_2，则代数式 $x_1+x_2-2x_1x_2$ 的值为（　　）

A．-3　　B．3　　C．-13　　D．13

4．关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx+c=0$ 的两根为 $x_1=2, x_2=3$，则代数式 $3x^2+bx+c$ 因式分解的结果是（　　）

A．$(x+2)(x+3)$　　B．$3(x+2)(x+3)$　　C．$(x-2)(x-3)$　　D．$3(x-2)(x-3)$

5．如图，某单位准备在院内一块长 30m、宽 20m 的长方形花园中修两条纵向平行和一条横向弯折的小道，剩余的部分种植花草．要使种植花草的面积为 532m^2，则小道进出口的宽度为（　　）



A．2m　　B．1m　　C．2m 或 17m　　D．1m 或 34m

6．若 m 是方程 $x^2-3x-1=0$ 的一个根，则 $-3m^2+9m+2026$ 的值为__________.

7．关于 x 的一元二次方程 $kx^2+2x-1=0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是______.

8．已知 $(x^2+y^2)(x^2+y^2-1)=12$，则 x^2+y^2 的值是________.

9．将 4 个数 a，b，c，d 排成 2 行 2 列，两边各加一条竖直线记成 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，定义：$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$，上述记号叫做 2 阶行列式，若 $\begin{vmatrix} 1+x & x \\ 1-x & x+1 \end{vmatrix}=1$，则 $x=$____________．

10．解方程：

(1) $x^2-2x-24=0$　　　　(2) $2x^2-6x+2=0$

11．已知关于 x 的一元二次方程 $x^2-\left(k+2\right)x+k-1=0$．

(1)如果方程的一个根是 2，求 k 的值

(2)求证：无论 k 取何值，此方程总有两个不相等的实数根；

12．2026 年央视春晚在浙江义乌设立分会场，一只因缝制失误而嘴角下撇的毛绒小马“哭哭马”意外走红，成为春晚热销品．某电商平台数据显示，该毛绒小马 1 月份销量为 20 万件，3 月份销量已增至 24.2 万件.

(1)求该电商平台“哭哭马”1 月到 3 月销量的月平均增长率.

(2)义乌某店铺以每件 15 元的价格购进“哭哭马”，当售价为 30 元/件时，日销量为 70 件．市场调查发现，售价每降低 1 元，日销量可增加 10 件，为借助春晚热度尽快减少库存，商家决定降价促销．为使销售利润达到 1200 元，则每件应降价多少元?

参考答案

1.

【答案】D

【详解】解：A．未说明$a\neq 0$，当$a=0$时，方程不是一元二次方程，故A错误；

B．方程含有x，y两个未知数，故B错误；

C．方程$x^2+\frac{1}{x^2}=0$中含有分式$\frac{1}{x^2}$，不是整式方程，故C错误；

D．方程$x^2+x=4$，整理得$x^2+x-4=0$，满足只含一个未知数，未知数最高次数为2，是整式方程，符合一元二次方程定义，故D正确.

2.

【答案】B

【详解】解：∵方程$x^2+mx+3=0$的一个根是1，

∴将$x=1$代入方程得$1^2+m\cdot 1+3=0$，

解得$m=-4$，

∴原方程为$x^2-4x+3=0$，

将方程因式分解得$(x-1)(x-3)=0$，

解得$x_1=1$，$x_2=3$，

∴方程的另一个根是3.

3.

【答案】B

【详解】解：∵一元二次方程$x^2+5x-4=0$的两个实数根为x_1和x_2，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{5}{1}=-5,\ x_1x_2=\frac{-4}{1}=-4$，

$\therefore x_1+x_2-2x_1x_2=-5-2\times(-4)=-5+8=3$.

4.

【答案】D

【详解】∵关于x的一元二次方程$3x^2+bx+c=0$的两根为$x_1=2,\ x_2=3$，

∴根据一元二次方程根与因式分解的关系可得$3x^2+bx+c=3(x-2)(x-3)$

因此代数式$3x^2+bx+c$因式分解的结果对应选项D.

5.

【答案】B

【详解】解：设小道进出口的宽度为 xm，

通过将小道平移到长方形两侧，

根据平移后面积不变得，$30\times20-20\times2x-30x+2x^2=532$，

即 $x^2-35x+34=0$，

解得：$x=1$或$x=34$（舍）

∴小道进出口的宽度为$1m$．

6.

【答案】2023

【详解】解：∵m是方程$x^2-3x-1=0$的一个根，

$\therefore m^2-3m-1=0$，

$\therefore m^2-3m=1$，

$\therefore -3m^2+9m+2026$

$=-3\left(m^2-3m\right)+2026$

$=-3\times1+2026$

$=2023$．

7.

【答案】$k>-1$且$k\neq0$

【详解】解：∵关于x的一元二次方程$kx^2+2x-1=0$有两个不相等的实数根，

$\therefore k\neq0$，$\Delta=b^2-4ac=2^2-4k\times(-1)>0$．

整理得$4+4k>0$，解得$k>-1$．

综上可得k的取值范围是$k>-1$且$k\neq0$．

8.

【答案】4

【详解】解：$\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2-1\right)=12$

设$t=x^2+y^2$，由平方的非负性可知$t\geq0$

原方程变形为：$t(t-1)=12$

整理得：$t^2-t-12=0$

因式分解得：$(t-4)(t+3)=0$

解得：$t_1=4$，$t_2=-3$

$\because t\ge 0$，

$\therefore t=-3$不符合题意，舍去，

$\therefore x^2+y^2=4$.

9.

【答案】0或$-\frac{1}{2}$

【详解】解：由$\begin{vmatrix}1+x & x\\ 1-x & x+1\end{vmatrix}=1$得，$(x+1)^2-x(1-x)=1$，

$\therefore x^2+2x+1-x+x^2=1$，

$\therefore 2x^2+x=0$，

$\therefore x(2x+1)=0$，

$\therefore$ $x=0$或$2x+1=0$，

解得，$x=0$或$-\frac{1}{2}$.

10.

【答案】（1）$x_1=-4$，$x_2=6$；（2）$x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

【详解】（1）解：$x^2-2x-24=0$

$(x-6)(x+4)=0$

$x-6=0$或$x+4=0$

$\therefore x_1=-4$，$x_2=6$；

（2）解：$2x^2-6x+2=0$

$a=2,b=-6,c=2$

$\Delta=(-6)^2-4\times 2\times 2=20>0$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{6\pm\sqrt{20}}{4}=\frac{6\pm 2\sqrt{5}}{4}$$

$\therefore x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

11.

【答案】（1）$k=-1$；（2）见解析

【详解】（1）解：∵关于 x 的一元二次方程 $x^2-(k+2)x+k-1=0$ 有一个根是 2，

∴把 $x=2$ 代入 $x^2-(k+2)x+k-1=0$ 得 $2^2-2(k+2)+k-1=0$，

解得 $k=-1$；

（2）证明：由题意得，$\Delta=\left[-(k+2)\right]^2-4(k-1)$

$=k^2+4k+4-4k+4$

$=k^2+8$，

$\because k^2\geq 0$，

$\therefore k^2+8\geq 8>0$，

∴无论 k 取何值，此方程总有两个不相等的实数根.

12.

【答案】（1）10%；（2）每件应降价 5 元

【详解】（1）解：设月平均增长率为 x，

$20(1+x)^2=24.2$，

解得：$x_1=0.1=10\%, x_2=-2.1$（舍去），

答：月平均增长率为 10%.

（2）解：设降价 y 元，

$(30-y-15)\times(70+10y)=1200$，

整理得，$y^2-8y+15=0$

解得：$y_1=3, y_2=5$，

∵尽快减少库存，

$\therefore y=5$，

答：每件应降价 5 元.